«Чарівне» коло в задачах на побудову

Задачам на побудову стільки ж років, скільки й самій геометрії. Циркуль та лінійка (без поділів) полонили усіх без виключення давньогрецьких математиків – від Фалесу до Паппа Александрійського. Протягом семи сторіч вони разом з учнями вдосконалювали свою майстерність в геометричних побудовах, створювали «золотий фонд» задач, виконуваних (та вирішуваних) за допомогою циркуля та лінійки.

І сьогодні задачі на побудову, можливо, як ніякі інші, потребують творчого підходу, вигадки, винахідливості. Вони розвивають кмітливість та винахідливість, потребують високої ерудиції, навчають завзятості у подоланні труднощів.

У запропонованій нижче добірці задач на побудову головною «дійовою особою» є коло. Тому всі основні події будуть, що називається, «обертатися навколо неї!..» Віримо, що чарівність «колових» задач принесе задоволення читачам, просуне їх уперед у більш тонкому розумінні як задач на побудову, так і геометрії в цілому.

Відмітимо, що пункт « дослідження побудови « у статті виключений свідомо, щоб не знижувати емоцію. Читачі можуть виконати відповідні « дослідження « самостійно, тим більше, що в деяких задачах це може виявитися важливим і навіть вплинути на результат. У задач немає складних, виснажливих розв'язань , а є, як здається, грайливість, азарт, потреба мислити! І все та ж чарівність. Отже, приступаємо...

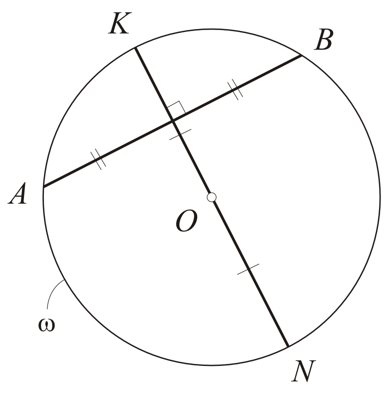


рис.1

Задача 1. Побудуйте центр кола ω, якщо його не вказано.

Розв'язання. Проведемо довільну хорду AB у колі ω (рис.1). Серединний перпендикуляр до неї – KN – очевидно, співпадає з діаметром. Тоді центр O кола ω - це середина відрізка KN.

Відмітимо, що задача припускає ряд інших способів розв'язання.

Задача 2. До даного кола ω проведіть дотичну паралельно до даної прямої l.

Розв'язання. З центру O кола ω проведемо перпендикуляр до прямої l. Нехай він перетинає ω в точці K (рис.2). Тоді пряма, проведена через K паралельно до l, співпадає з шуканою дотичною.

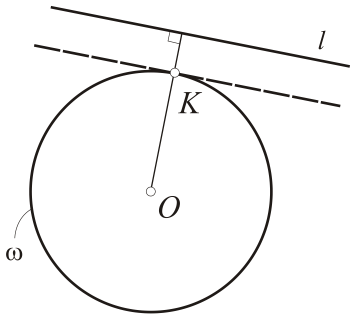


рис.2

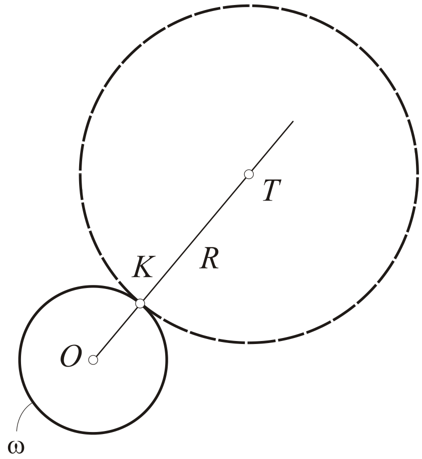


рис.3

Задача 3. Дано коло ω та точка *K* на ньому. Провести радіусом *R* коло *s*, що дотикається до *ω* у точці *K*.

Розв'язання. Оскільки центри кіл, що дотикаються, і сама точка дотику лежать на одній прямій, то на промені *OK* відкладемо відрізок *KT* = *R* (рис.3). Після чого побудуємо коло s з центром у точці *T* радіуса *TK* = *R*.

Задача 4. Точка *K* знаходиться між двома паралельними прямими *a* та *b*. Проведіть через *K* коло *ω*, що дотикається до прямих *a* і *b*.

Розв'язання. Нехай відстань між *a* і *b* дорівнює *m*. Проведемо пряму *q* на відстані $\frac{m}{2}$ від *a* та *b* паралельно кожній з них (рис.4). Засічка з точки *K* радіусом, що дорівнює $\frac{m}{2}$, дозволить отримати центр *O* шуканого кола *ω*. Далі будуємо коло ω(*O;OK* = $\frac{m}{2}$).

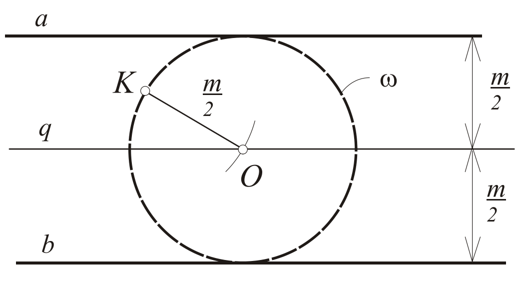


рис.4

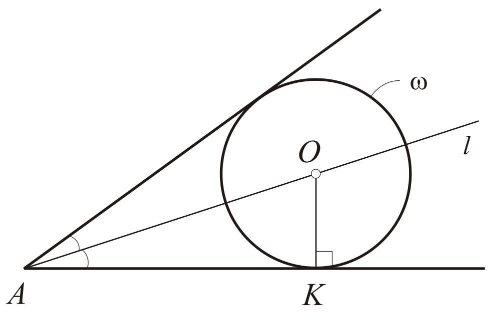


рис.5

Задача 5. Провести коло ω, що дотикається до сторін даного кута *A*, причому однією з сторін — у даній точці *K*.

Розв'язання. Проведемо бісектрису *l* кута *A*. З точки *K* встановимо перпендикуляр до «своєї» сторони кута (рис.5). Він перетинає *l* у центрі *O* шуканого кола *ω*. Залишається побудувати *ω(O;OK)*.

Задача 6. Побудуйте коло ω найменшого радіуса, що проходить через дві дані точки *A* і *B*.

Розв'язання. Очевидно, коло ω буде коло, побудоване на *AB* як на діаметрі (рис.6). Дійсно, для всіх інших кіл *AB* буде хордою.

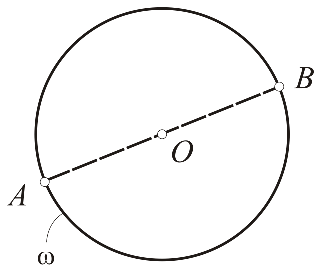


рис.6

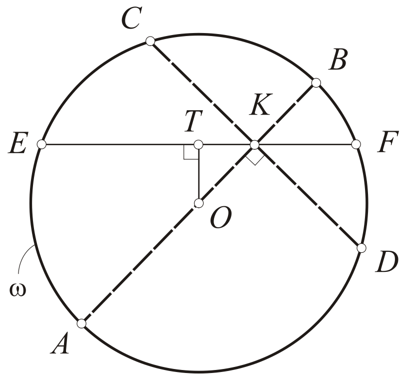


рис.7

Задача 7. Через точку *K* всередині кола *ω* проведіть хорду а) найбільшої довжини; б) найменшої довжини.

Розв'язання. а) Очевидно, хордою найбільшої довжини буде діаметр *AB*, що проходить через *K* (рис.7)

б) Хордою найменшої довжини буде $CD \perp KO$. Покажемо це. Нехай найменшою хордою буде деяка інша хорда *EF*, що проходить через точку *K*. Нехай також $OT \perp EF$. Тоді *OT*<*OK* катет менший за гіпотенузу у прямокутному ΔOTK. Оскільки з двох хорд більшою є та, що ближче до центру (покажіть!), то *EF* < *CD*. Таким чином, *CD* — найменша хорда.

Задача 8. На продовженні діаметру *AB* кола *ω* знайдіть точку *K* таку, щоб дотична до *ω* з точки *K* дорівнювала б радіусу *ω*.

Розв'язання. Аналіз показує, що якщо *KN* = *ON* = *R* і $\angle KNO = 90°$ (*N* – точка дотику), то $\angle 1 = \angle 2 = 45°$ (рис.8). Тоді з *O* під кутом $45°$ до *AB* проводимо радіус *ON*. А з точки *N* встановлюємо перпендикуляр до *ON*, що перетинає продовження діаметру *AB* в шуканій точці *K*.

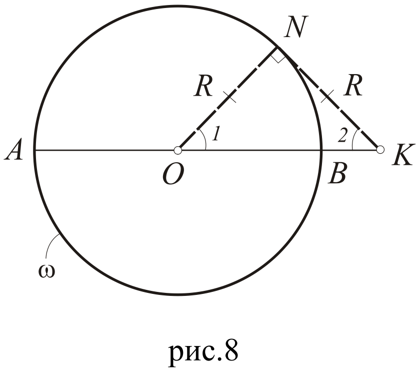


рис.8

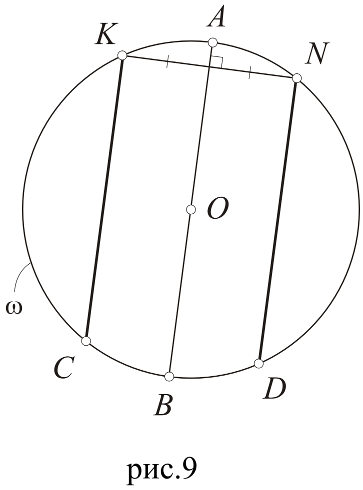


рис.9

Задача 9. Через точки *K* і *N* на колі *ω* проведіть дві рівні паралельні хорди.

Розв'язання. Серединний перпендикуляр до хорди *KN* співпадає з діаметром *AB* (рис.9). Проведемо хорди *KC* і *ND* паралельно *AB*. Вони рівні як рівновіддалені від центру *O* хорди. Отже, хорди *KC* і *ND* — шукані.

Задача 10. Дано точки *K* і *N*. Побудуйте коло ω з центром в *K*? щоб дотична до неї з *N* мала задану довжину *m*.

Розв'язання. На відрізку *KN* як на діаметрі побудуємо коло *s* (рис.10). З точки *N* розтином циркуля, рівним *m*, зробимо засічку на цьому колі. Отримаємо точку *T*. При цьому $\angle NTK = 90^\circ$ (вписаний, спирається на діаметр). Тоді коло з центром у точці *K* радіуса *KT* співпаде з шуканим колом ω. Покажіть це!..

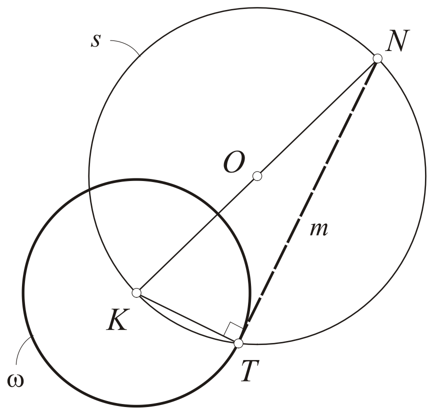


рис.10

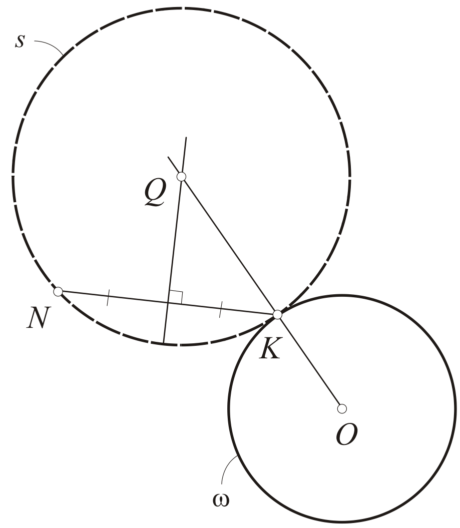


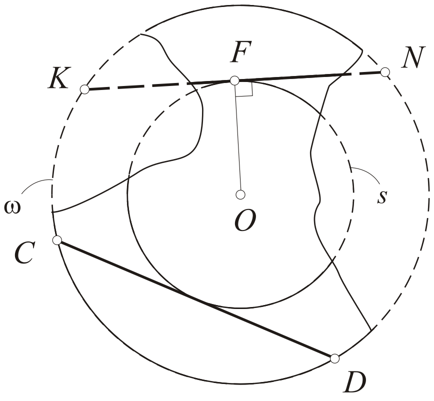
рис.11

Задача 11. Дано коло *ω* та точка *K* на ньому. Через дану точку *N* зовні *ω* проведіть коло *s*, що дотикається ω саме в точці *K*.

Розв'язання. Центр шуканого кола *s* буде знаходитися на промені *OK* (*O* — центр кола *ω*). А також на серединному перпендикулярі до *NK* (оскільки *NK* - хорда у колі s). Тоді у перетині отримаємо центр *Q* шуканого кола (рис.11). Після чого строїмо коло *s(Q;QK)*.

Задача 12. Кінці хорди *KN* кола *ω* недоступні. Визначить побудовою довжину *KN*.

Розв'язання. Знаходимо центр *O* кола *ω* (задача 1). Проводимо $OF \perp KN$ (рис.12). Будуємо коло *s(O;OF)*, концентричну до кола *ω* (що має спільний з ним центр). Дотична до s в будь-якій її точці визначить у перетині з *ω* хорду, рівну *KN*. Наприклад, *CD* = *KN*.



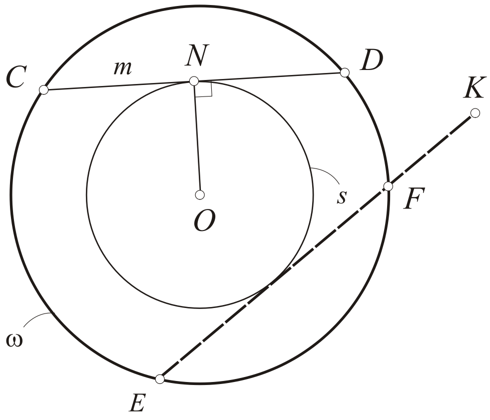


рис.12 рис.13

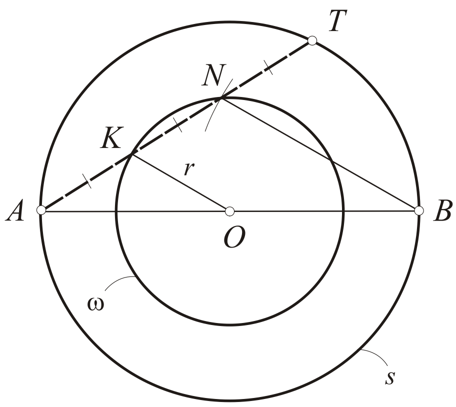
Задача 13. З точки *K* зовні кола *ω* проведіть січну так, щоб її внутрішня частина мала дану довжину *m* (Е.Безу).

Розв'язання. Проведемо в колі *ω* хорду *CD = m* (довільно). З центра *ω* проведемо $ON \perp CD$ (рис.13). Побудуємо коло *s(O;ON)*, концентричну до кола *ω*. Тоді дотична до *s* з точки *K* визначить хорду *EF* заданої довжини *m*.

Задача 14. ω і s — два концентричних кола радіусів r і R відповідно. Проведіть січну так, щоб вона, перетинаючи обидва кола давала три рівні відрізки.

Розв'язання. Нехай шукана січна *AT*, де *AK = KN = NT* (рис.14). Проведемо *AB* — діаметр кола s. Аналіз показує, що *OK = r* — середня лінія в ΔABN. Тоді *BN = 2r*. Тоді з точки *B* робимо засічку на *ω* радіусом, рівним *2r*. Отримаємо точку *N*. Пряма *AN* співпаде з шуканою січною.

<u>Зауваження.</u> Самостійно покажіть, чому *AK = NT*.



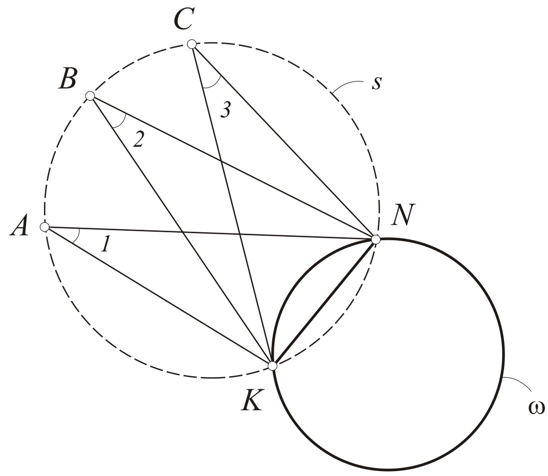


рис.14 рис.15

Задача 15. Зовні кола *ω* дано точки *A; B; C* (рис.15). Проведіть в *ω* хорду *KN*, яку було б видно з точок *A; B; C* під рівними кутами.

Розв'язання. Опишемо коло s навколо ΔABC. Воно буде перетинати ω в шуканих точках *K* і *N*. Дійсно, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ — вписані, спираються на одну дугу у колі *s*.

<u>Зауваження.</u> Самостійно розгляньте інше розташування точок *A; B* і *C*.

Задача 16. Проведіть дотичну до кола ω через точку *K* на ω, не знаходячи центру кола.

Розв'язання. Проведемо у колі ω хорди *KN* і *KT* (довільно) — рис.16. Нехай $\angle KNT = \alpha$. Через точку *K* під кутом α до *KT* проведемо промінь *KF*. Він співпаде з шуканою дотичною. І ось чому: $\angle KNT = \alpha = \frac{1}{2} \cup KT$ — вписаний кут). Оскільки $\angle FKT = \alpha = \frac{1}{2} \cup KT$, то він є кутом між дотичною та січною.

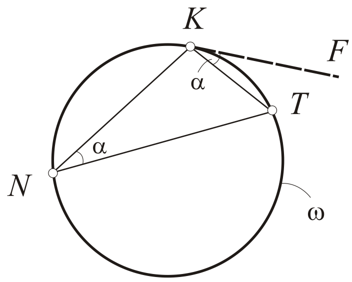


рис.16

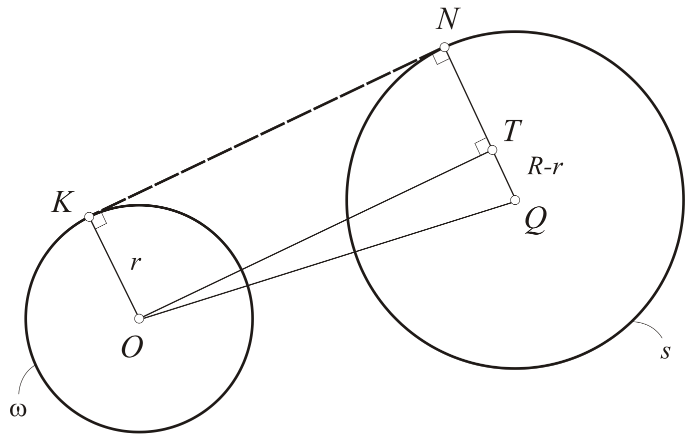


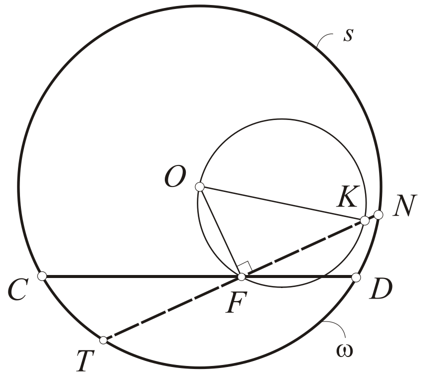
рис.17

Задача 17. До двох неперетинаючихся кіл ω та *s* проведіть спільну зовнішню дотичну. (Д.Кардано)

Розв'язання. Нехай *O* та *Q* — центри кіл ω та s радіусів r і *R* відповідно (рис.17). Аналіз показує, що якщо *KN* - шукана дотична, то *KN = OT* (*OKNT* — прямокутник) і *QT = R-r*. Звідси побудова: на відрізку *OQ* як на діаметрі будуємо коло, а потім з точки *Q* робимо на ній засічку розтином циркуля, що дорівнює *R-r*. Подальше очевидно.

Задача 18. Через точку *K* всередині кола ω проведіть хорду, що ділиться даною хордою *CD* навпіл.

Розв'язання. На відрізку *OK* як на діаметрі побудуємо коло *s* (рис.18). Нехай *F* - одна з точок перетину *CD* і *s* (очевидно, таких точок може бути дві; одна; жодної). Тоді пряма *KF* у перетині з ω дасть шукану хорду *NT*. Дійсно, $\angle KFO = 90°$ (вписаний, спирається на діаметр у колі *s*). Оскільки діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл, то *OF* (частина діаметру у колі ω) ділить хорду *NT* навпіл. Отже, і *CD* поділяє *NT* навпіл, тобто *NF = FT*.



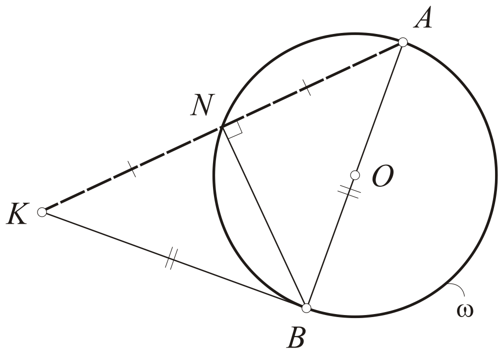


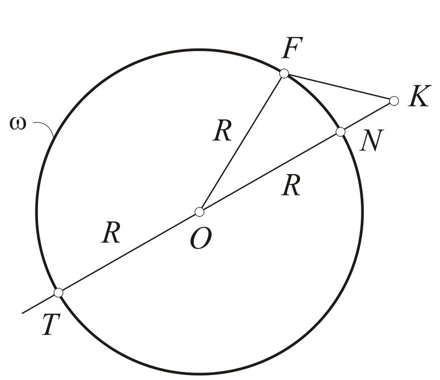
рис.18 рис.19

Задача 19. Точка K знаходиться зовні кола ω. Проведіть через K січну до ω так, щоб її внутрішня частина була рівна зовнішній. (Е. Каталан)

Розв'язання. Проведемо аналіз розв'язання задачі. Нехай $K – N – A$ — шукана дотична, де $KN = NA$ (рас.19). Проведемо AB — діаметр ω. З'єднаємо B та N. Тоді $\angle BNA = 90°$ — вписаний, спирається на діаметр AB у колі ω. Відмітимо, що в ΔABK відрізок BN є і висотою, й медіаною. Отже, ΔABK — рівнобедрений і $KB = AB = 2R$ (де R — радіус ω). Звідси побудова: з точки K робимо на ω засічку розтином циркуля, рівним $2R$. Отримуємо точку B. Проводимо BA - діаметр ω. Відрізок KA співпадає з шуканою січною, оскільки, очевидно, $KN = NA$.

Задача 20. Точка K знаходиться зовні кола ω. Побудуйте на ω точку, відстань від якої до точки K а) мінімальна; б) максимальна.

Розв'язання. Нехай промінь KO (O — центр ω) перетинає ω у точках N і T (рис.20). Покажемо, що точка N відповідає умові а), а точка T — умові б). Припустимо, що не N, а, скажімо, точка F віддалена мінімально від K. Згідно нерівності трикутника (ΔKFO) $KF + FO < KO$ або $KF + R < KN + R$. Звідки $KF < KN$. Протиріччя. Отже, саме точка N віддалена на мінімальну відстань від K. Аналогічно доводиться і пункт б): точка T віддалена на максимальну відстань від K — з точок, що лежать на колі ω.



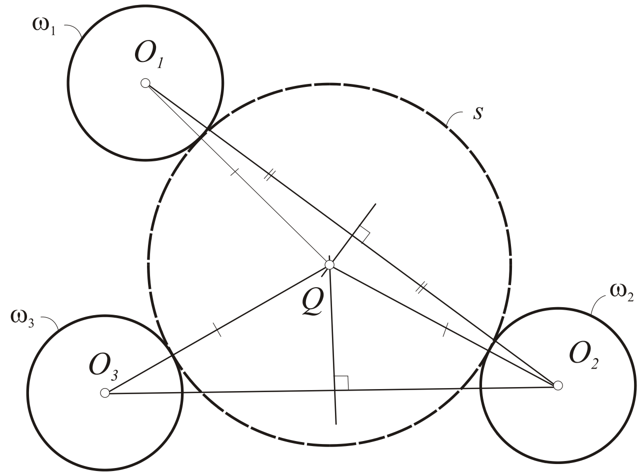


рис.20 рис.21

Задача 21. Три рівні кола $\omega_1; \omega_2; \omega_3$ не мають спільних точок. Побудуйте коло s, що дотикається усіх трьох зовнішнім чином.

Розв'язання. Нехай $O_1; O_2; O_3$ — центри рівних кіл $\omega_1; \omega_2; \omega_3$ відповідно. Припустимо, що коло s з центром Q побудовано. Тоді, очевидно, $QO_1 = QO_2 = QO_3$ (рис.21). Отже, для знаходження точки Q достатньо провести два серединних перпендикуляра, наприклад, до відрізків O_1O_2 і O_2O_3. Подальше очевидно!

Задача 22. Дано точки $K; N; T$. Побудуйте два рівні кола з центрами в N і T, щоб їх спільна дотична проходила через точку K.

Розв'язання. Проведемо через K промінь t перпендикулярно NT. Нехай цей промінь перетинається у точці F (рис.22). З точок N і T як з центрів проводимо два рівні кола радіусом, що дорівнює KF. Тоді пряма, проведена через K паралельно до NT, співпаде з шуканою дотичною.

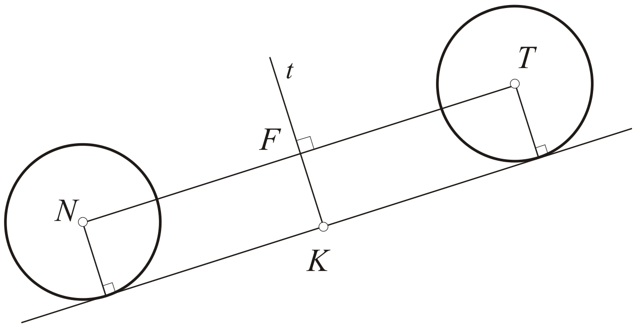


рис.22

Задача 23. Побудуйте коло, що дотикається до трьох даних прямих $a; b; c$.

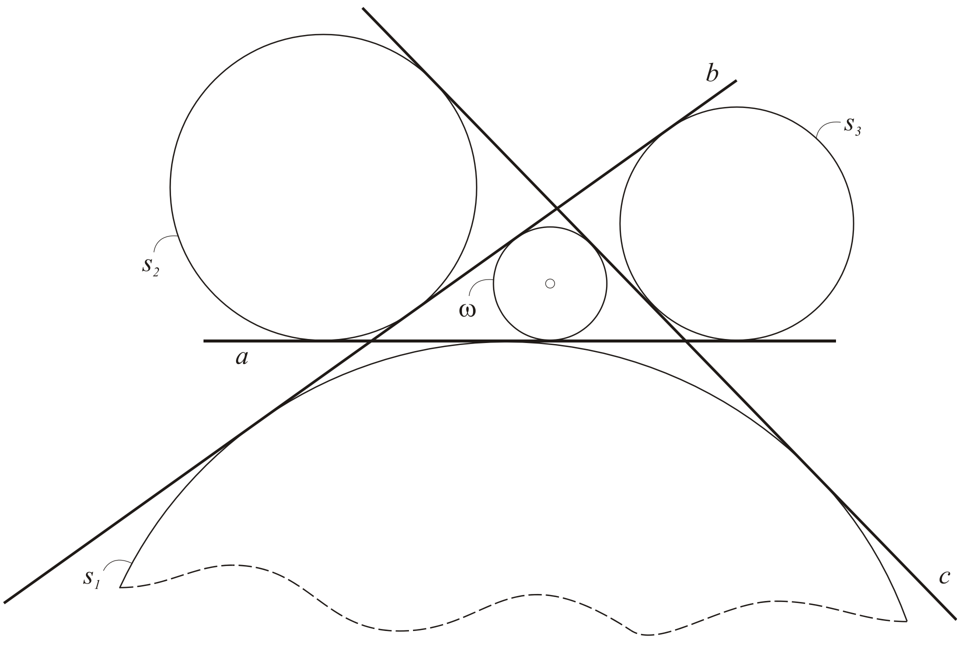


рис.23

Розв'язання. "Чарівність" цієї задачі складається у тому, що таких кіл 4. Це коло ω, вписане в утворений трикутник (рис.23). А також кола $s_1; s_2; s_3$, кожна з яких дотикається до однієї з сторін утвореного трикутника та продовжень двох його інших сторін. Такі кола носять назву зовнівписаних кіл.

Зауваження 1. Можливо, саме з цієї задачі й слід розпочати знайомство із зовнішніми колами.

Зауваження 2. Розгляньте самостійно випадок, коли дві з трьох даних прямих паралельні.

Задача 24. Кола ω і s, точка K зовні кіл розташовані так, як показано на рис.24. Через K проведіть відрізок NT з кінцями на колах ω і s - такий, щоб $KN = KT$.

Розв'язання. Нехай O і Q — центри ω і s відповідно. З'єднаємо O і K і продовжимо за точку K на стільки ж — отримаємо точку N. З точки O_1 як із центру радіусом, рівним радіусу ω, проведемо коло ω_1. Це коло у перетині з s дасть шукані точки N_1 та N_2. Тоді N_1K при продовженні перетинає ω у точці T_1. А N_2K перетинає ω у точці T_2 (дальній точці). Причому, $N_1K = KT_1$ та $N_2K = KT_2$ (покажіть!)

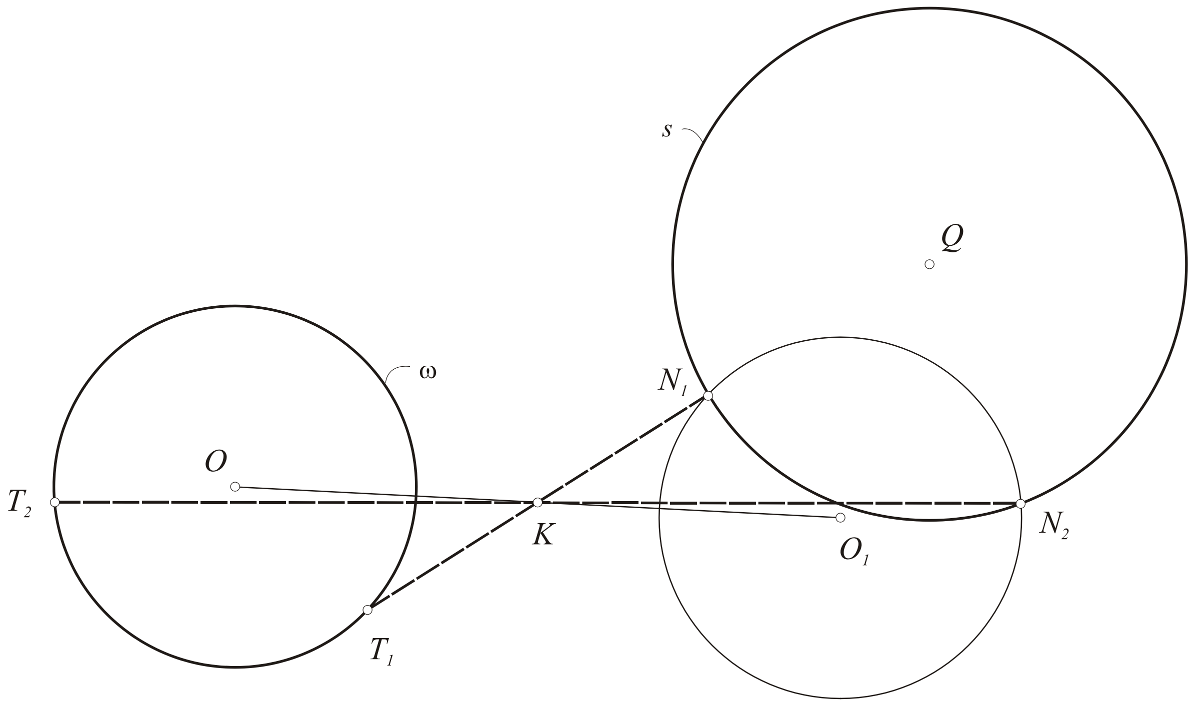


рис.24

Задача 25. Дані кола ω_1 і ω_2 радіусів R_1 і R_2. Побудуйте коло s радіуса r, щоб воно дотикалось як до ω_1, так і до ω_2. *(Аполлоній)*

Розв'язання. Побудуємо коло ω_3 радіуса $R_1 + r$, концентричну до ω_1. А також коло ω_4 радіуса $R_2 + r$? концентричну з ω_2 (рис.25). Одна з точок перетину ω_3 і ω_4 (наприклад, K) дасть центр шуканого кола s. Залишається побудувати її — із радіусом, що дорівнює r.

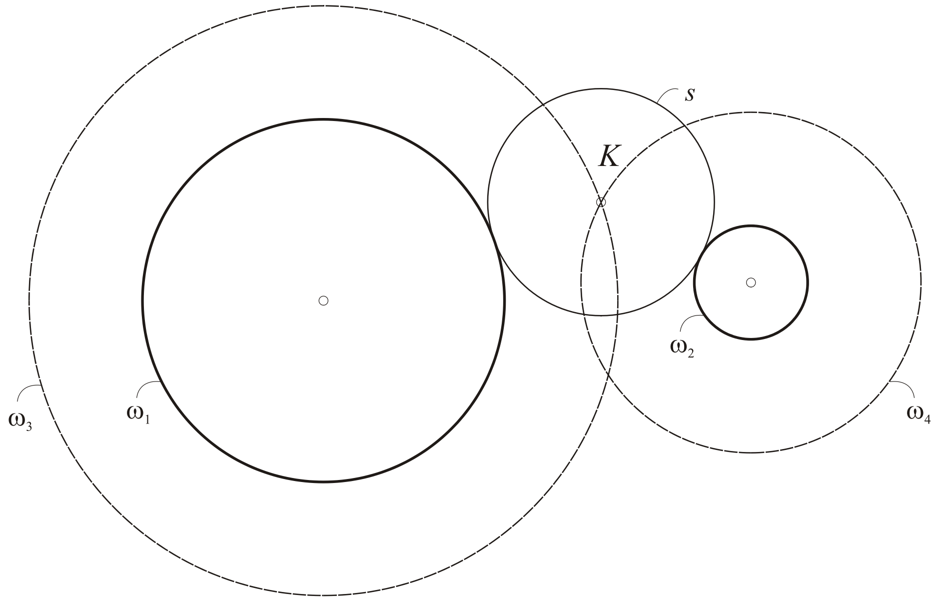


рис.25