

Розділ IV

Гасла геометрії

Був час, коли уряд савани на чолі з левом Лео не схвалював захоплення звірят геометрією. Видно, уряд побоювався, що звірята, які знають геометрію, будуть куди розумнішими за сам уряд. Уряд, навіть, зажадал замкнути слоненятко Лу удома на цілий тиждень!..

Тоді усі звірята, як один, вийшли на демонстрацію. Причому, йшли вони не з порожніми лапами, а з прапорами і транспарантами – гаслами геометрії. А нести гасло можна було тільки в тому випадку, якщо той, хто несе, знав його доказ. От як!



Хід очолював, природно, бегемотик Бру з гаслом на прапорі «Рівним дугам – рівні хорди!».

Завдання 9. Якщо дуги рівні, то й хорди, що стягують їх, теж рівні. Доведіть!

Доведення. Нехай $\cup AB = \cup CD = \alpha$ (рис. 15). Доведемо, що хорди AB і CD також рівні.

З'єднаємо A, B, C і D з центром O . $\angle AOB = \angle COD$ – як центральні. Тоді $\triangle AOB = \triangle COD$ – за двома сторонами і кутом між ними. А в рівних трикутниках відповідні сторони рівні. Отже, $AB = CD$.

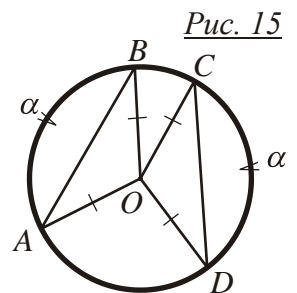


Рис. 15

«Більшій стороні – більший кут!»

Завдання 10. Проти більшої сторони в трикутнику лежить більший кут. Доведіть!



Доведення. Нехай $BC = a$ – найбільша сторона в $\triangle ABC$ (рис. 16). Доведемо, що кут, який знаходиться проти неї, буде найбільшим.

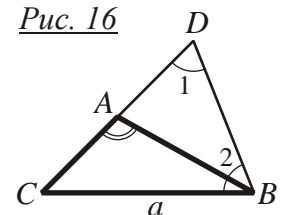


Рис. 16

Продовжимо сторону CA до точки D в такий спосіб, щоб $CD = CB = a$. Тоді $\triangle CDB$ – рівнобедрений і $\angle 1 = \angle 2$. Але кут A більший, ніж $\angle 1$ ($A = \angle 1 + \angle ABD$ – як зовнішній для $\triangle ADB$). Отже, кут A

більший, ніж $\angle 2$, а $\angle 2$ більший за кут B (оскільки B складає частину $\angle 2$). Таким чином, $A > B$.

Аналогічно доводиться, що $A > C$. Все!

Носоріг Нок очолив рух «За рівність дуг між паралельними хордами!».

Завдання 11. Дуги, що містяться між паралельними хордами, рівні. Доведіть!

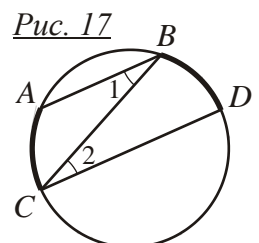


Рис. 17

Доведення. Нехай хорди AB і CD паралельні (рис. 17). Доведемо, що $\cup AC = \cup BD$. З'єднаємо B і C . Тоді $\angle 1 = \angle 2$ (внутрішні різносторонні при паралельних прямих). Але $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AC$ (вписаний) і

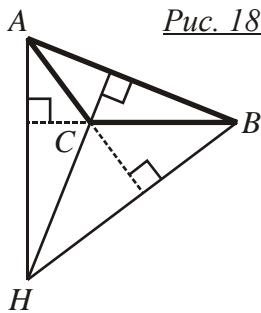


Рис. 18



$$\angle 2 = \frac{1}{2} \cup BD$$

(також вписаний). Ось і виходить, що $\cup AC = \cup BD$.

Далі прямувала група звірят з досить гострим, навіть злегка ризикованим

гаслом «Для тупих – ортоцентр зовні!».

Завдання 12. У тупокутному трикутнику точка перетину висот H (ортоцентр) знаходиться поза трикутником. Покажіть!

Показуємо! – рис. 18.

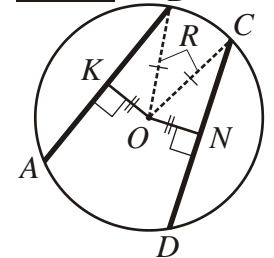
Мавпочки Бобо, Коко і Тото, будуючи пики (звичайно ж, уряду савани), несли дуже важливий напис: «Хордам, рівновіддаленим від центру, – рівність і свободу!»

(Відмітимо, що ми нічого не можемо сказати щодо свободи, але рівність вищезгаданим хордам гарантуємо!..)



Завдання 13. Хорди, рівновіддалені від центру, рівні. Доведіть!

Рис. 19



Доведення. Нехай хорди AB і CD рівновіддалені від центру, тобто $OK = ON$ (рис. 19).

Оскільки, $BO = CO = R$, то $\triangle KOB = \triangle NOC$ (за катетом та гіпотенузою). Тоді $KB = CN$. Але $KB = \frac{1}{2} AB$ і

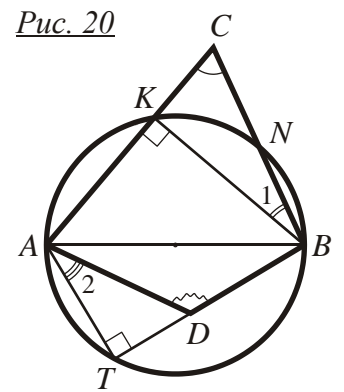
$$CN = \frac{1}{2} CD. \text{ (доведіть!).}$$

Отже, $AB = CD$, що й потрібно було довести!

Велике враження на уряд савани справив такий транспарант з тих, що несли звірята: «Зовні – гострий, всередині – тупий!».

Рис. 20

Завдання 14. Кут поза колом, що спирається на діаметр, – гострий, а аналогічний кут з вершиною усередині кола – тупий. Доведіть!





Доведення. Нехай Точка C знаходиться поза колом з діаметром AB . З'єднавши її з кінцями діаметра, в перетині з колом отримаємо точки K і N (рис. 20).

$\angle AKB = 90^\circ$ (вписаний, спирається на діаметр). Але $\angle AKB = C + \angle 1$ (як зовнішній для трикутника KCB). Таким чином, $C < 90^\circ$, тобто цей кут є гострим.

Нехай, скажімо, $\angle ADB$ знаходиться усередині кола. Покажемо, що він тупий. Продовжимо BD до перетину з колом в точці T .

$\angle ATB = 90^\circ$ (вписаний, спирається на діаметр). При цьому $\angle ADB = \angle ATB + \angle 2 = 90^\circ + \angle 2$ (як зовнішній для $\triangle ATD$). Отже, $\angle ADB > 90^\circ$, тобто він тупий!

Ще декілька гасел, які брали найактивнішу участь в демонстрації звірят, ми пропонуємо розшифрувати і довести самостійно.

Завдання 15. «Більшому куту – більшу сторону!»

Завдання 16. «Рівність і свободу кутам із взаємно-перпендикулярними сторонами!»

Завдання 17. «Ближче до центру – більша хорда!»

Завдання 18. «В гіпотенузі – дві медіани до неї!»

Завдання 19. «Пол гіпотенузи – даєш кут 30° !»

Завдання 20. «Золото, срібло і бронзу – медіані, бісектриси та висоти!»

Ну, і які ж підсумки такої масової геометричної демонстрації?

Вони істотні. Не можна сказати, що уряд на чолі з левом Лео запалав любов'ю до геометрії. Нажаль, ні! Але щось до голів членів уряду дійшло. В усякому разі, чинити перешкоди захопленню звірят геометрією вони перестали, а слоненя Лу з-під домашнього арешту було звільнене.

Коли після всіх подій на савану спускався вечір, на верхівці баобаба легкий вітерець теревив ще один плакат:

Завдання 21. «Серединному перпендикуляру до хорди – звання діаметра!»