О прямой, проходящей через точки касания вписанной в треугольник ABC окружности

Афанасьев Д.А.,

Филипповский Г.Б.,

Русановский лицей (Киев, Украина),

e-mail: afandanil@gmail.com

g.filippovsky@yandex.ua

Пусть в треугольник *ABC* вписана окружность ω с центром *I*, касающаяся его сторон *BC*, *AC* и *AB* в точках K_1, K_2 и K_3 соответственно (рис.1).

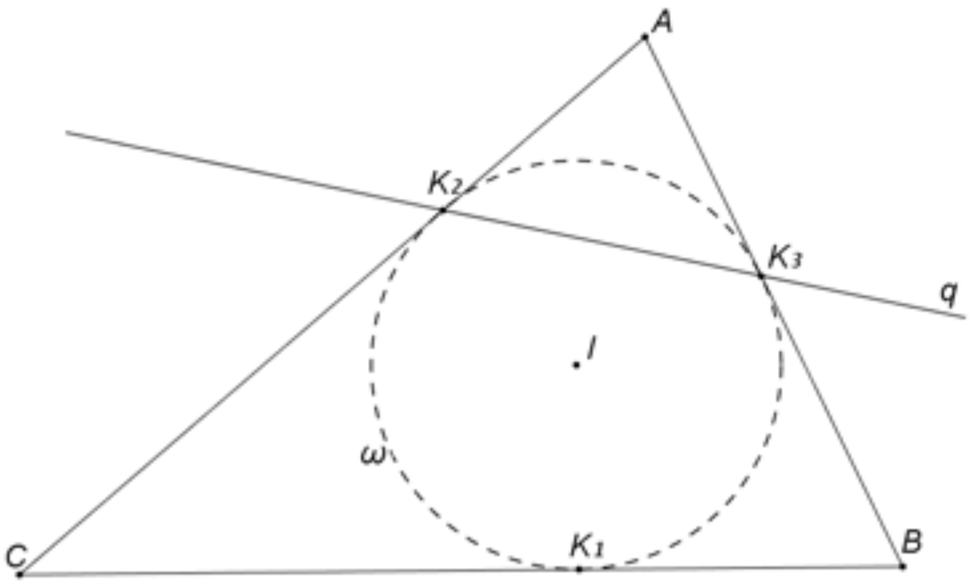


рис.1

Мы поведём наш разговор о прямой *q*, проходящей через точки K_2 и K_3. Оказалось, что эта прямая как сама по себе, так и в связи с другими прямыми и точками в треугольнике *ABC* обладает целым рядом интересных, важных свойств, востребованных при составлении олимпиадных задач различного уровня сложности. Поэтому предлагаемая коллекция задач с прямой *q* представляется целесообразной для проведения факультативных занятий и спецкурсов во время подготовки учащихся к математическим соревнованиям. Верим также, что задачи будут полезны и вызовут интерес у всех, кто любит геометрию (вне зависимости от участия в олимпиадном движении).

Задача 1. Биссектриса угла B треугольник ABC пересекает прямую q в точке T. Докажите, что $\angle BTC = 90^{o}$.

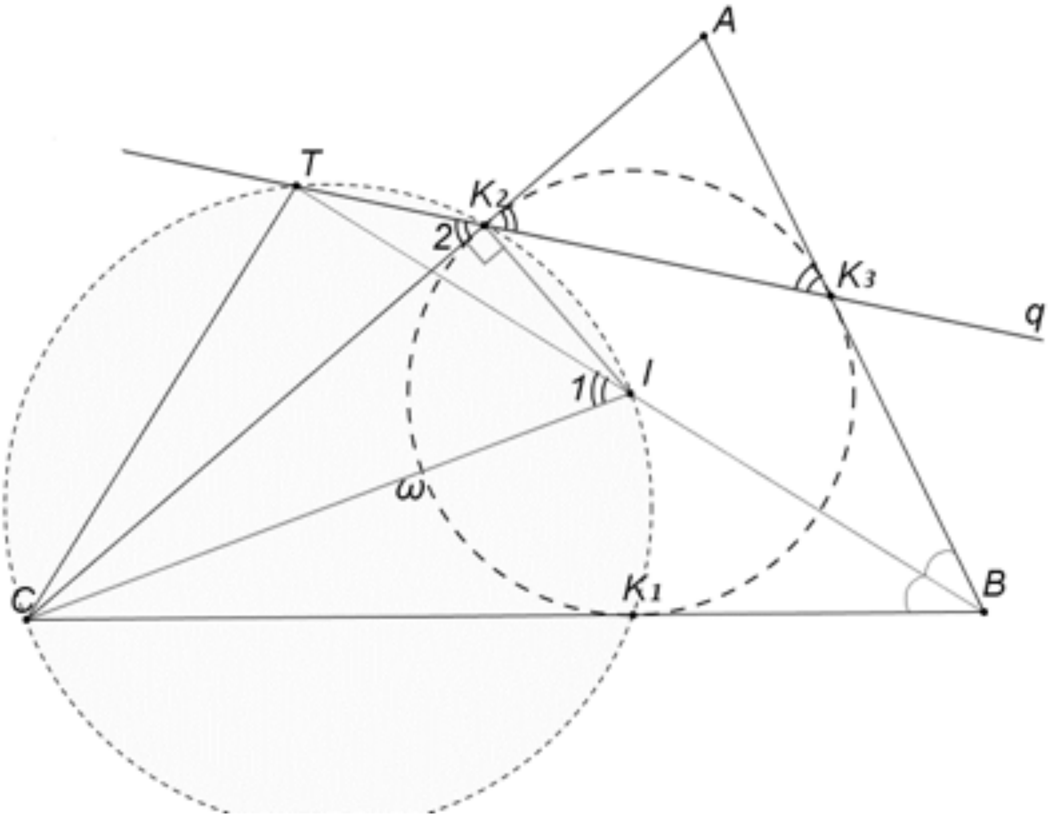


рис.2

Доказательство. Соединим центр I вписанной в треугольник ABC окружности с вершиной C и с точкой касания K_2 (рис.2). Известно, что $\angle BIC = 90^{o} +$. Тогда смежный с ним $\angle 1 = 90^{o}-$. В равнобедренном треугольнике AK_2K_3 $\angle AK_2K_3 = \angle AK_3K_2 = 90^{o} -$. Тогда и $\angle 2 = 90^{o} -$. Поскольку $\angle 1 = \angle 2$, то точки $I - K_2 - T - C$ лежат на одной окружности. Но $\angle IK_2C = 90^{o}$. Значит, и $\angle ITC$ или (что одно и то же) $\angle BTC = 90^{o}$.

Задача 2. *CD* и *BE* – перпендикуляры, проведенные к биссектрисам углов *B* и *C* треугольника *ABC* соответственно. Докажите, что *DE* совпадает с прямой *q*.

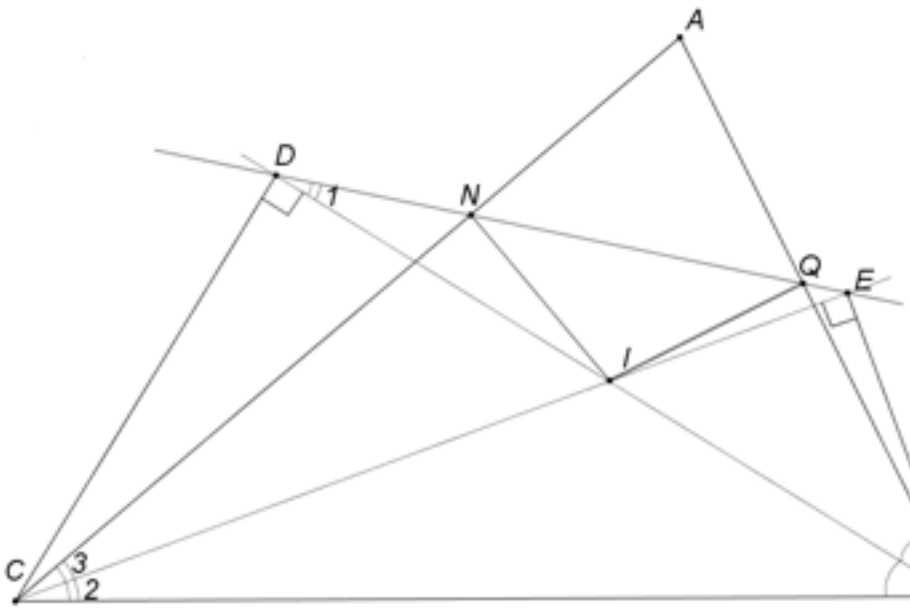


рис.3

Доказательство. Очевидно, что точки *B – E – D – C* лежат на одной окружности с диаметром *BC*. Тогда $\angle 1 = \angle 2$ – они вписанные, опираются на одну дугу этой окружности (рис.3). Пусть *DE* пересекает *AC* и *AB* в точках *N* и *Q* соответственно. Соединим их с центром *I* вписанной в треугольник *ABC* окружности. Как уже было сказано, $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 2 = \angle 3$ (*CI* – биссектриса $\angle ACB$). Поскольку $\angle 1 = \angle 3$, то точки *I – N – D – C* лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle INC = 90^{\circ}$. То есть, $N \equiv K_2$. Аналогично показывается, что $Q \equiv K_3$.

Задача 3. Восстановите треугольник *ABC* по вершинам *B*; *C* и прямой *q*.

Доказательство. Согласно задаче 2, окружность, построенная на *BC* как на диаметре, пересекает прямую *q* в точках *D* и *E* (рис.4) таких, что *BD* и *CE* совпадают с биссектрисами углов *B* и *C* соответственно.

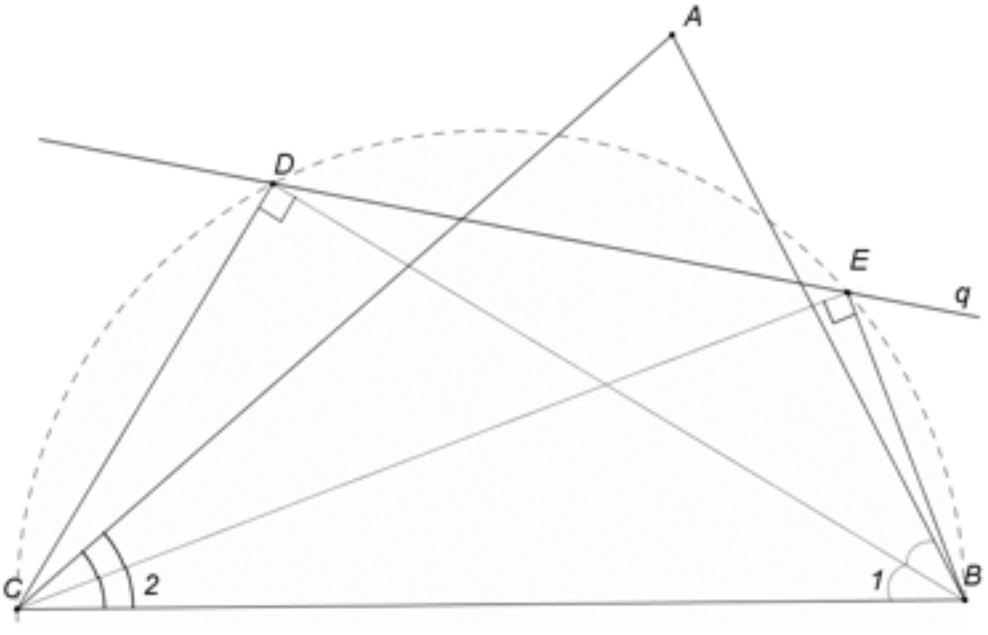


рис.4

Остаётся лишь удвоить получившиеся половинки углов B и C ($\angle 1$ и $\angle 2$), чтобы в пересечении получить недостающую вершину A.

Задача 4. Средняя линия M_1M_3 треугольника ABC, параллельная стороне AC, пересекает прямую q в точке F. Найти величину угла BFC.

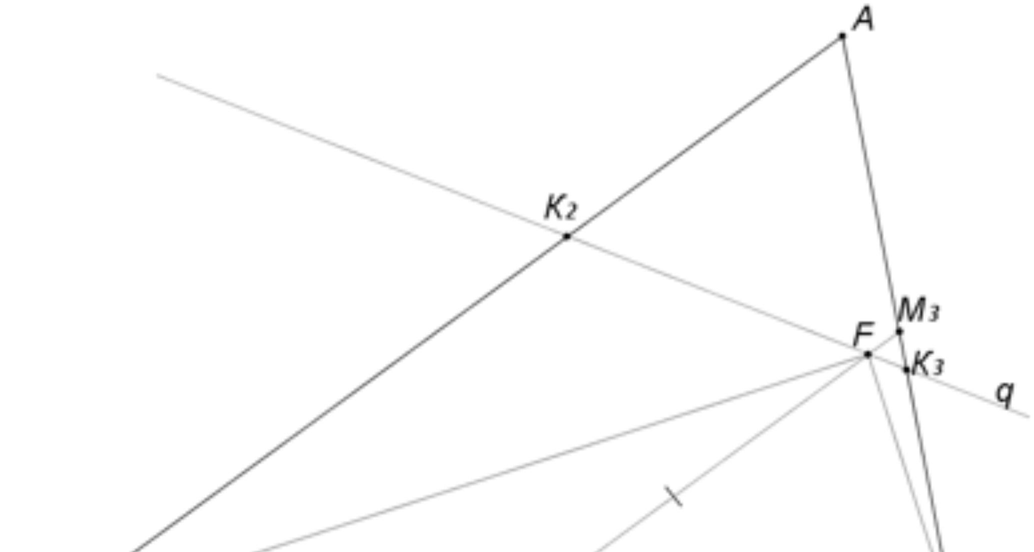


рис.5

Доказательство. Пусть $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$. Тогда $BM_1 = M_1C =$ и $M_1M_3 =$ (рис.5). Известно, что $AK_2 = AK_3 = p - a$. Поскольку $AM_3 = M_3B =$, то $M_3K_3 = M_3F = p - a - = - =$. Тогда $M_1F = - =$. Таким образом, $M_1F = BM_1 = M_1C =$. Следовательно, $\angle BFC = 90^o$.

Задача 5. Докажите, что в условиях <u>задачи 4</u> *CF* совпадает с биссектрисой угла *C* треугольника *ABC*.

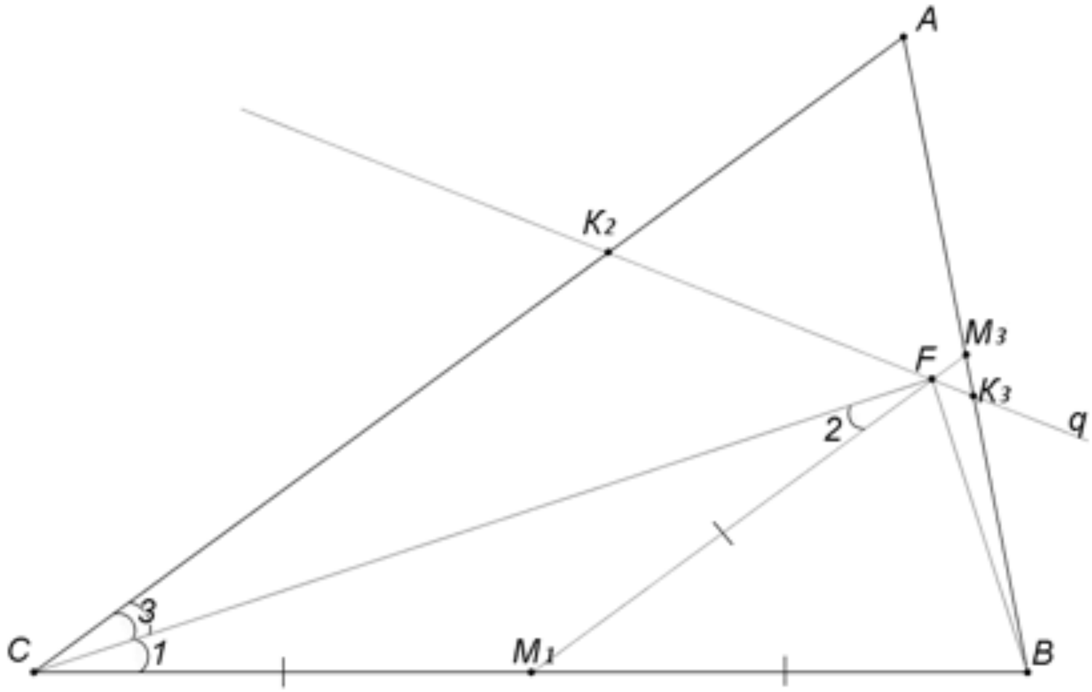


рис.6

Доказательство. Так как $M_1F = M_1C =$ (задача 4), то $\angle 1 = \angle 2$ (рис.6). $M_1M_3 \| AC$ (M_1M_3 – средняя линия треугольника *ABC*). Тогда $\angle 2 = \angle 3$, как внутренние накрест лежащие. Тогда, и $\angle 1 = \angle 3$, то есть *CF* – биссектриса угла *ACB* треугольника *ABC*.

Задача 6. Через точку M_1 – середину *BC* – проведена прямая параллельно прямой *q*. Она пересекает прямые *AC* и *AB* в точках *E* и *T* соответственно (рис.7). Докажите, что $CE = BT = M_1K_1$.

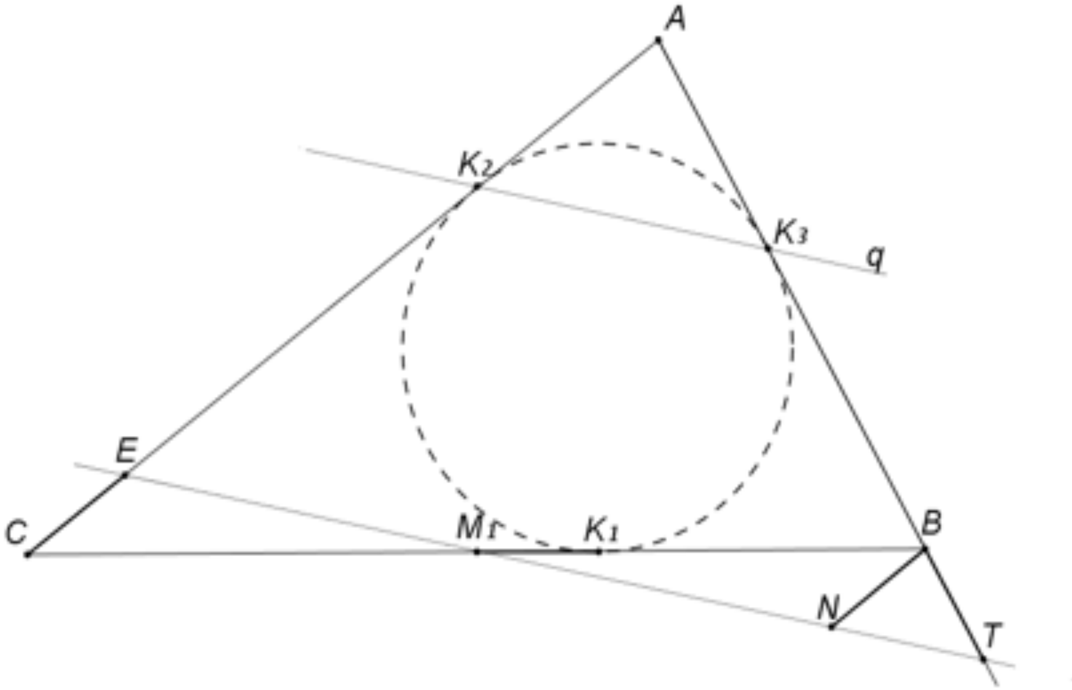


рис.7

Доказательство. Так как $CK_1 = CK_2 = p - c$, а $CM_1 = BM_1 =$, то $M_1K_1 = p - c - = - =$. Проведём $BN \| CE$. Тогда из равенства ΔBM_1N и ΔCM_1E – по стороне и двум прилежащим углам – следует, что $BN = CE$. Стороны ΔAK_2K_3 и ΔBNT соответственно параллельны. Поскольку $AK_2 = AK_3$, то и $BN = BT$. Пусть тогда $CE = BT = x$. ΔAET – равнобедренный, так как ΔAK_2K_3 – равнобедренный. $AE = AT$, или $b - x = c + x$, откуда $x =$. Итак, $BT = CE = M_1K_1 =$.

Задача 7. Постройте треугольник ABC по точкам K_2; K_3 и прямой a_x, содержащей сторону BC.

Доказательство. Очевидно, что задача сводится к построению точки K_1 касания окружности ω, вписанной в треугольник ABC, со стороной BC. Продлим K_2K_3 до пересечения с a_x в точке D (рис.8).

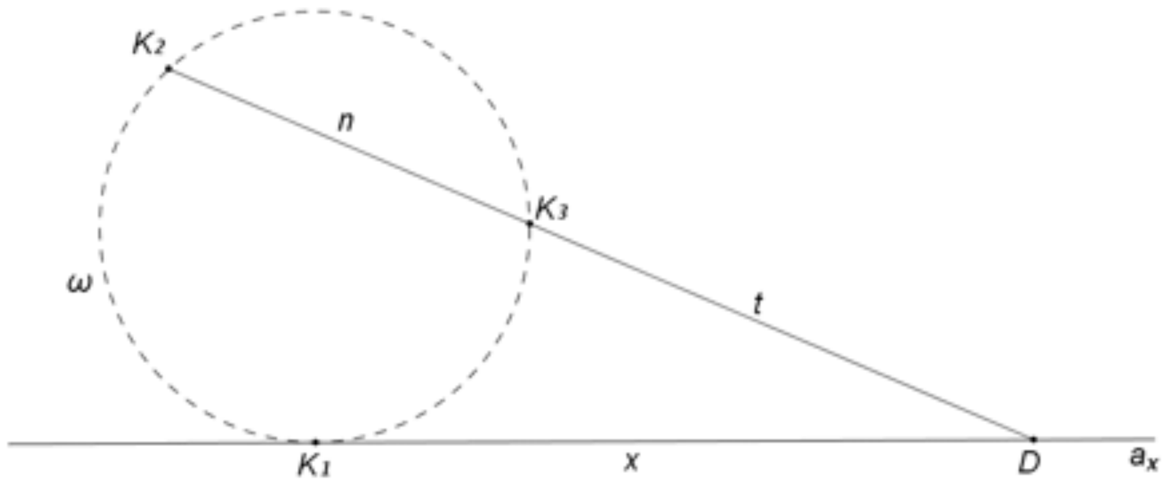


рис.8

Пусть $K_2K_3 = n$; $K_3D = t$. Тогда, воспользовавшись теоремой о квадрате касательной, мы можем построить отрезок $x = DK_1$: $x =$. А значит, получить точку K_1. Затем строим окружность ω (она описана около треугольника $K_1K_2K_3$). Дальнейшее очевидно!..

Задача 8. K_3N – диаметр окружности ω, вписанной в треугольник ABC $D = K_1N \cap q$ (рис.9). Докажите, что: а) $CD = CK_1 = CK_2$; б) $AB \| CD$.

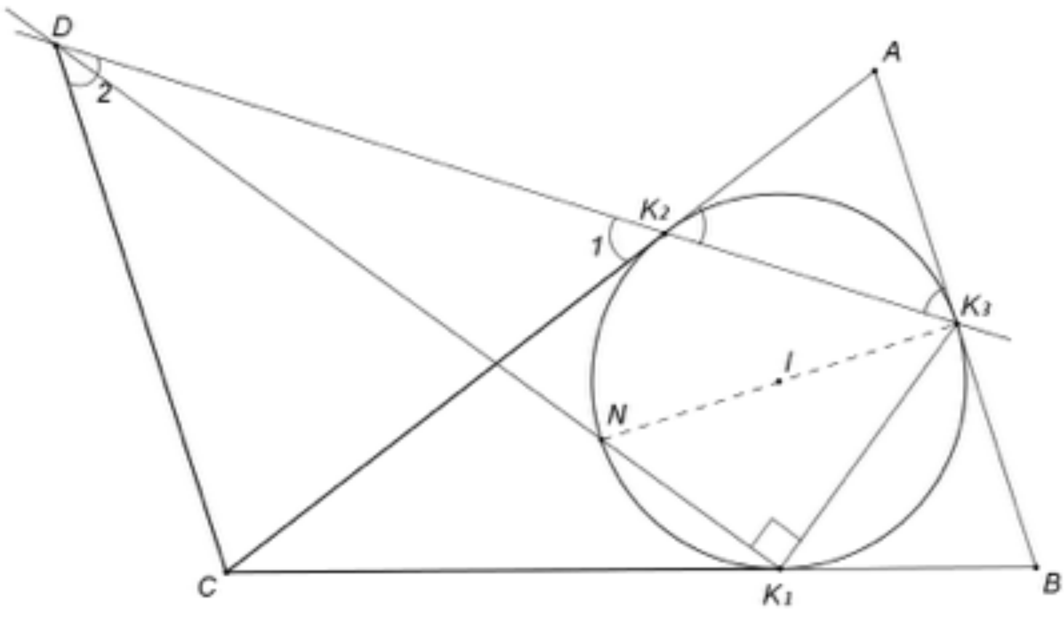
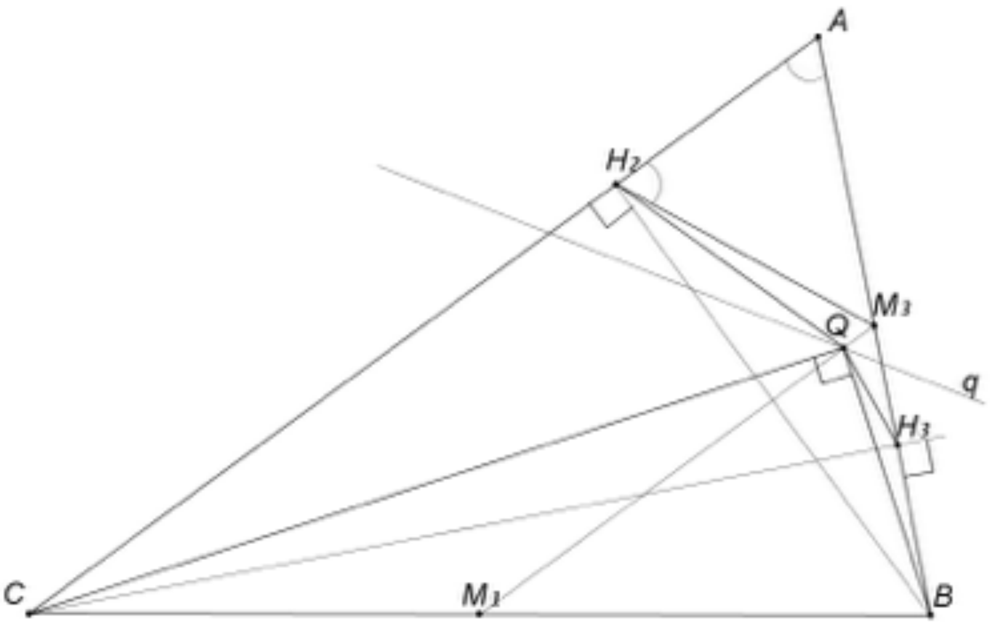


рис.9

Доказательство. $\angle AK_2K_3 = \angle AK_3K_2 = 90^o$ - . Аналогично $\angle BK_1K_3 = \angle BK_3K_1 = 90^o$ - . Тогда $\angle DK_3K_1 = 180^o – (90^o -) – (90^o -) = 90^o$ - . Поскольку $\angle DK_1K_3 = 90^o$ – вписанный, опирается на диаметр в окружности ω, то $\angle K_1DK_3 =$ (сумма углов треугольника – для ΔDK_1K_3). Из точки C как из центра проведём окружность радиуса $CK_1 = CK_2$. Очевидно, она пройдёт через точку D, так как $\angle K_1DK_3 =$. Следовательно, CD – тоже радиус этой окружности и $CD = CK_1 = CK_2$. Тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle AK_2K_3 = 90^o$ - . А $\angle DCK_2 = 180^o – (90^o -) – (90^o -) = A$. Так как $\angle DCK_2 = \angle BAC$, то $AB \| CD$.

Задача 9. Средняя линия M_1M_3 треугольника ABC, параллельная стороне AC, пересекает прямую q в точке Q. Докажите, что Q –точка пересечения биссектрис треугольника $H_2M_3H_3$ (рис.10).

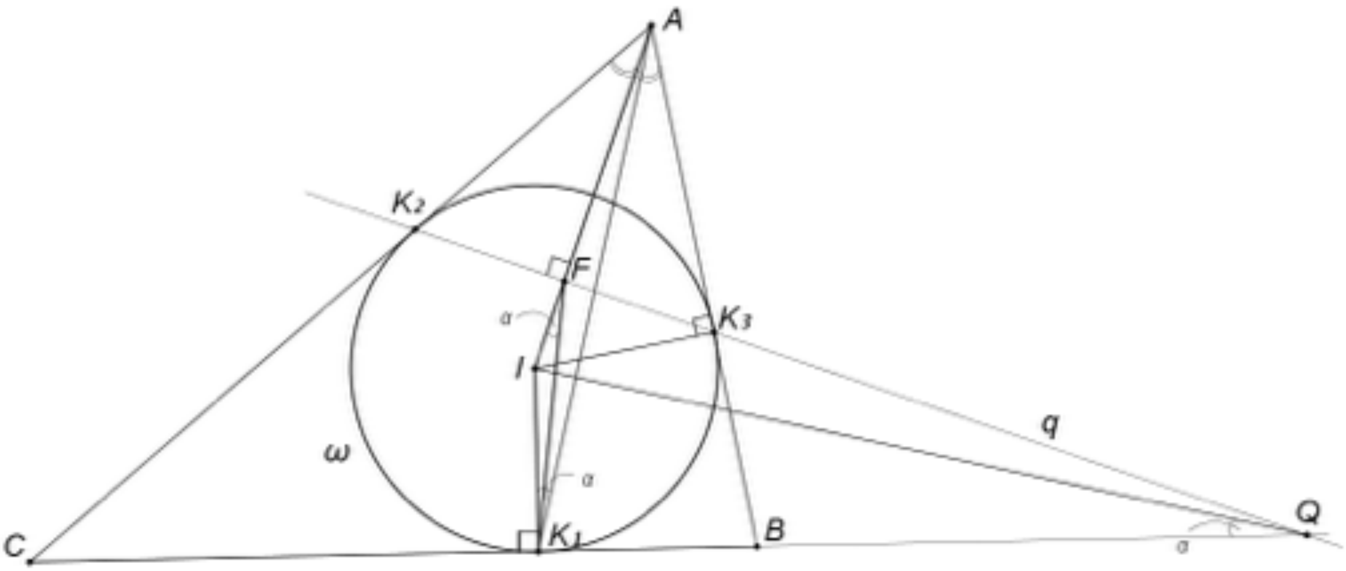
рис.10



Доказательство. Заметим, что в прямоугольном треугольнике AH_2B H_2M_3 – медиана, проведённая к гипотенузе и $\angle AH_2M_3 = \angle H_2AM_3 = A$ ($H_2M_3 = AM_3 = BM_3$). Тогда $\angle H_2M_3H_3 = 2A$, так как он внешний для треугольника AH_2M_3, но $\angle M_1M_3B = A$ ($AC \| M_1M_3$) $\Rightarrow M_1M_3$ – биссектриса $\angle H_2M_3H_3$.

С другой стороны точки $I – H_2 – Q – H_3 – B$ лежат на окружности, построенной на BC, как на диаметре (по задаче 4 $\angle BQC = 90^o$). $\angle ACH_3 = 90^o - A$. Следовательно, $\angle H_2QH_3 = 90^o + A$. Воспользуемся тем фактом, что если в треугольнике ABC $\angle BAC = \alpha$, то угол, образующийся биссектрисами углов B и C равен $90^o +$. Тогда так как точка Q в треугольнике $H_2M_3H_3$ лежит на биссектрисе угла $H_2M_3H_3$ и $\angle H_2QH_3 = 90^o + A$ следует, что H_2Q и H_3Q – биссектрисы $\Delta H_2M_3H_3$. Тогда Q –точка пересечения биссектрис треугольника $H_2M_3H_3$.

Задача 10. I – центр окружности ω, вписанной в треугольник ABC. $Q = BC \cap$

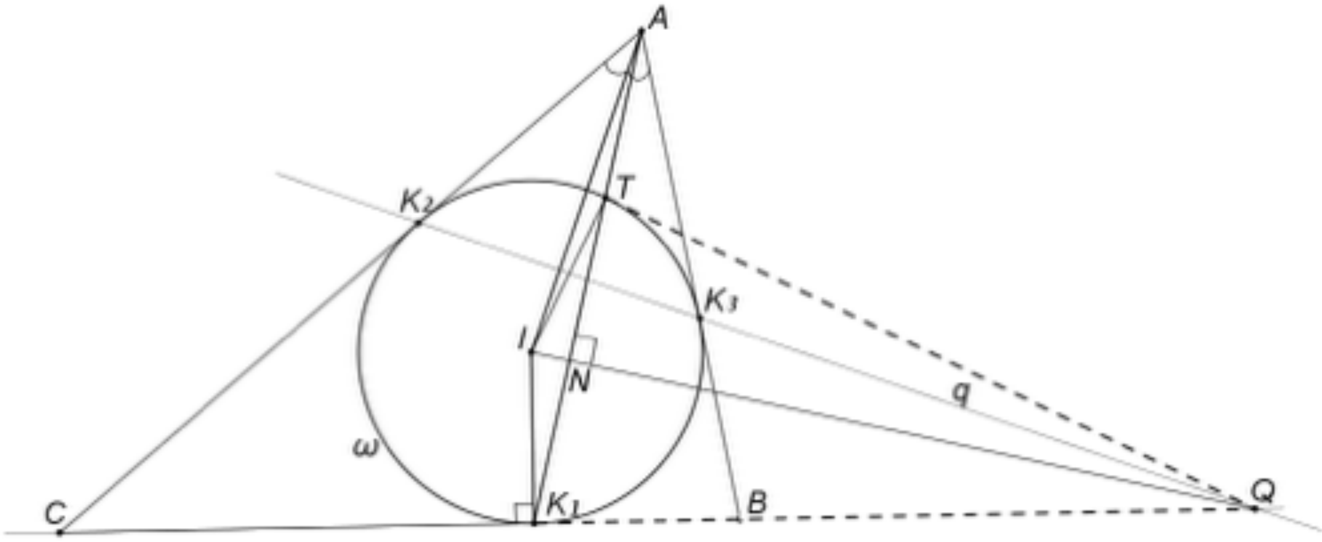


q (рис.11). Докажите, что $QI \perp AK_1$.

рис.11

Доказательство. Пусть $F = AI \cap q$. Очевидно, $AF \perp K_2K_3$ (AF – биссектриса в равнобедренном треугольнике AK_2K_3). $AB \perp IK_3$ ($IK_3 = r$). Тогда K_3F – высота, проведенная к гипотенузе в треугольнике AK_3I. Значит $= AI \cdot IF$. Но $IK_3 = IK_1 = r$. Следовательно, $= AI \cdot IF$, или $=$. То есть, треугольники FIK_1 и

K_1IA – подобны по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними (он у них общий, равный $\angle FIK_1$). Пусть тогда $\angle IFK_1 = \angle IK_1A = \alpha$. Тогда $AK_1Q = 90^o - \alpha$. Поскольку точки $Q - F - I - K_1$ лежат на одной окружности (два противоположных угла равны по 90^o), то $\angle IQK_1 = \angle IFK_1 = \alpha$. Тогда $90^o + \alpha - \alpha = 90^o$. Значит, $QI \perp AK_1$.

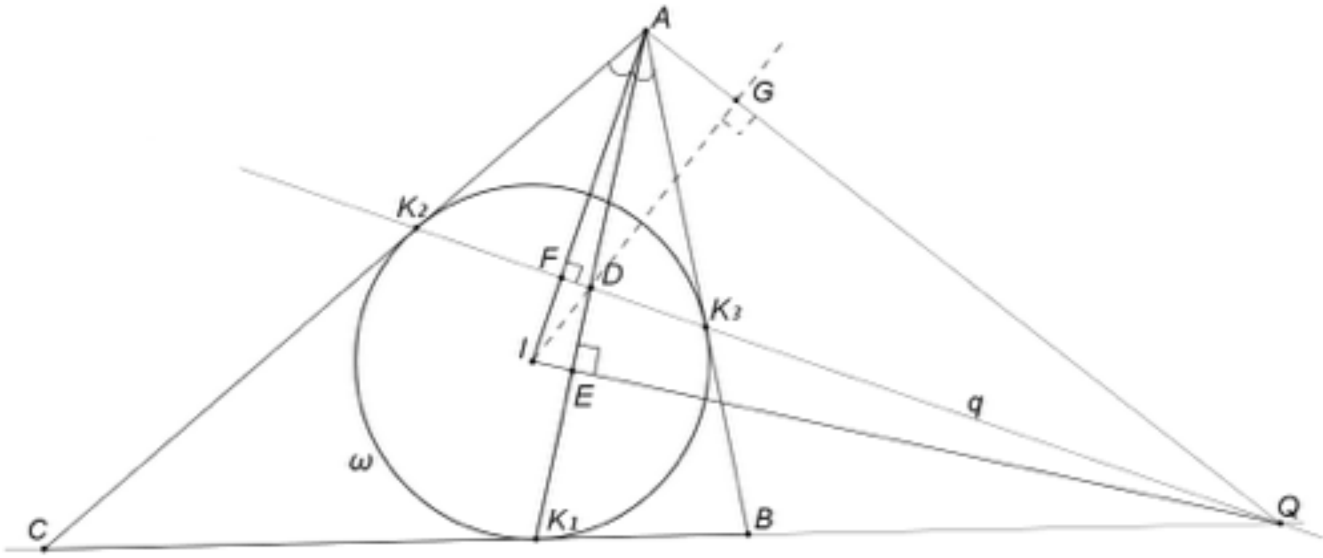


Задача 11. Окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC. $Q = BC \cap q$; $T = AK_1 \cap \omega$ (рис.12). Докажите, что $QT = QK_1$.

рис.12

Доказательство. Пусть $N = AK_1 \cap QI$. Согласно задаче 9 $QI \perp AK_1$, и $\angle ANQ = 90^o$. Тогда IN – высота в равнобедренном треугольнике ITK_1 ($IT = IK_1 = r$). Значит, и медиана: $NT = NK_1$. Получаем: $\Delta QNT = \Delta QNK_1$ – по двум катетам. Следовательно, $QT = QK_1$, что и требовалось доказать. Заметим, что QK_1 – касательная к ω. Тогда и QT – тоже касательная к ω.

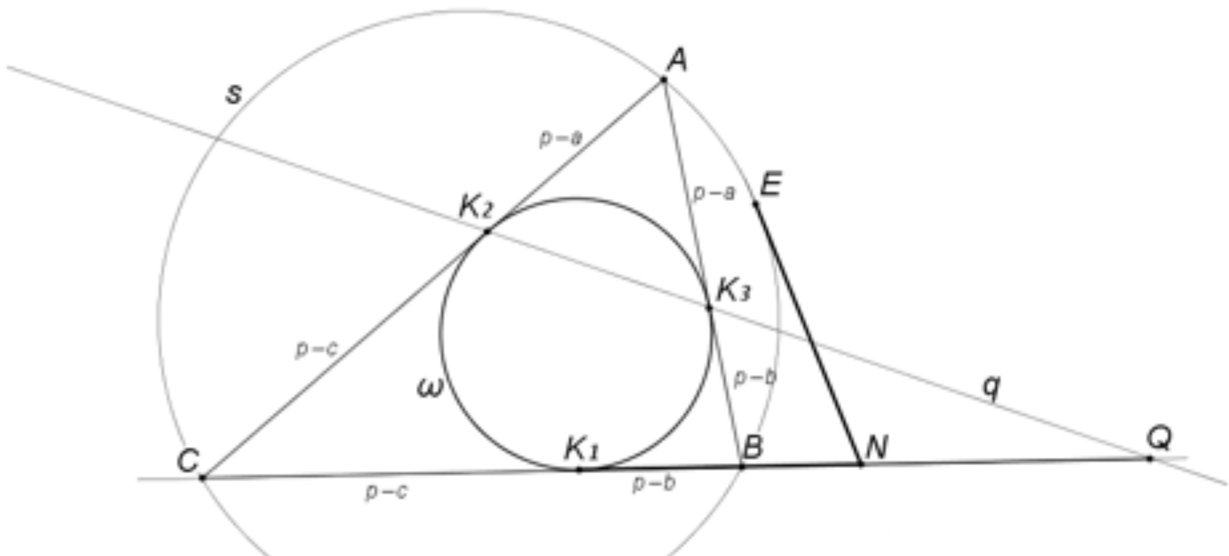
Задача 12. $Q = BC \cap q$; $D = AK_1 \cap q$. I – центр окружности ω, вписанной в треугольник ABC. Докажите, что $ID \perp AQ$ (рис.13).



Доказательство. Рассмотрим треугольник AIQ. Пусть $E = AK_1 \cap QI$; $F= AI \cap q$ и $G = ID \cap AQ$. Заметим, что AE – высота в треугольнике AIQ, так как $QI \perp AK_1$ (задача 9).

рис.13

QF – тоже высота в треугольнике AIQ, поскольку AF – биссектриса в равнобедренном треугольнике AK_2K_3. Тогда точка D – ортоцентр в



треугольнике AIQ, а IG – третья высота. Следовательно, $ID \perp AQ$.

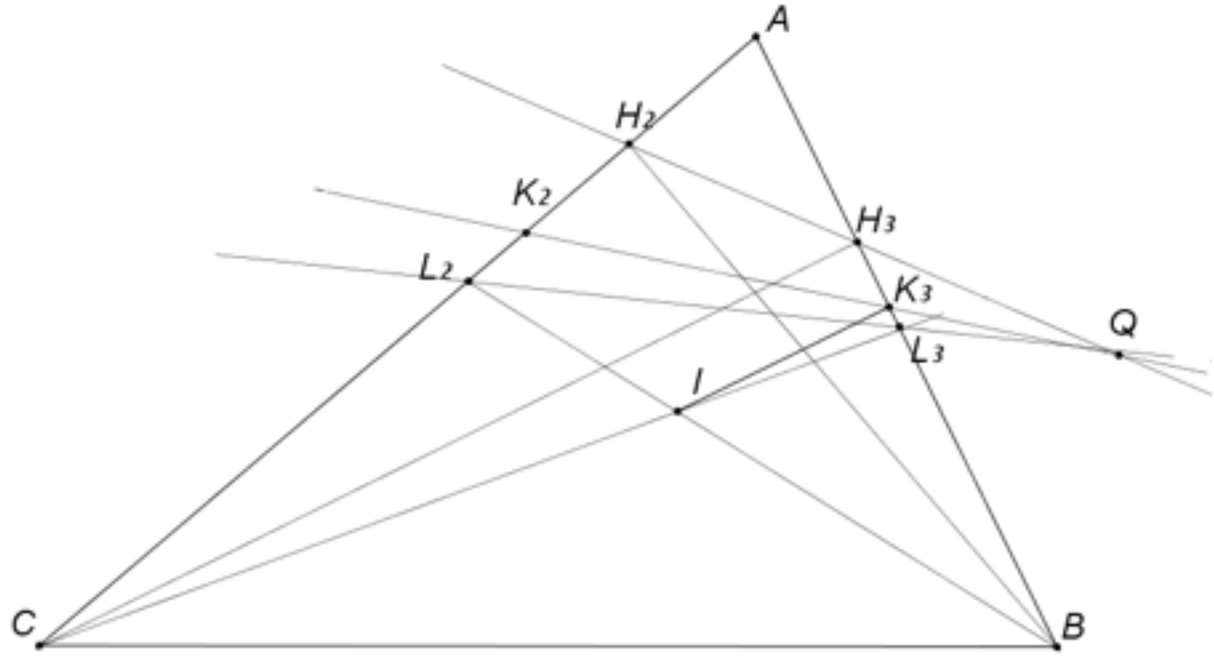
Задача 13. $Q = BC \cap q$; N – середина QK_1. Докажите, что касательные из точки N к вписанной в треугольник ABC окружности ω и к описанной около него окружности s – равны.

рис.14

Доказательство. Очевидно, что N K_1 – касательная к ω. Пусть NE – касательная к s (рис.14). Тогда по теореме о квадрате касательной имеем: $NE^2 = NC \cdot NB$. Если мы докажем, что и = $NC \cdot NB$, то задача будет решена. Запишем теорему Менелая для треугольника ABC и секущей q: · · = 1. Учитывая то, что $QC = BQ + a$, получим: =, или $BQ\ (p - c) = BQ\ (p - b) +$

$a(p - b)$, откуда BQ=. Далее: $QK_1 = BQ + p - b$. $QK_1 = + p - b =$. Тогда $NK_1 = =$ и = $()^2$.

$NB = NK_1 - BK_1 = - (p - b) =$. Аналогично, NC =. Тогда $NE^2 = NC \cdot NB = ()^2 =$, что и требовалось доказать.



Задача 14. Точки H_2, H_3 – основания высот, а точки L_2, L_3 – основания биссектрис треугольника ABC. Докажите, что прямые H_2H_3, L_2L_3 и q пересекаются в одной точке (рис.15).

рис.15

Доказательство. Рассмотрим треугольник AL_2L_3 и его секущие H_2H_3 и K_2K_3. Тогда по теореме Менелая с одной стороны: · · = 1, а с другой: · · = 1. Но если мы докажем, что =, то точки Q_1 и Q_2 будут совпадать. Докажем, что · = ·.

$AK_2 = AK_3$ как касательные к вписанной в треугольник ABC окружности. = (так как треугольники ABC и AH_2H_3 подобны). Воспользуемся свойством биссектрисы: =. Тогдапо теореме Фалеса для треугольника CL_3H_3: =. Аналогично =. Теперь подставив все пропорции в изначальную, получим: · =, что и требовалось доказать.

Несколько задач, связанных с прямой *q*, предлагаемых для самостоятельного решения

Задача 15. На стороне BC как на диаметре построен полукруг, который пересекает средние линии, параллельные AB и AC в точках E и Fсоответственно. Докажите, что прямые EF и q совпадают.

Задача 16. Треугольник ABC – прямоугольный ($\angle C = 90^o$). Высота CH_3 пересекает q в точке F.Докажите, что $CF = BK_3$.

Задача 17. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^o$) перпендикуляр из K_1 к прямой q пересекает катет AC в точке T. Докажите, что $AT = r$ – радиусу вписанной в треугольник ABC окружность.

Задача 18. Точка N – середина отрезка K_2K_3. Докажите, что $\angle BNC$ – тупой.

Задача 19. Прямые q и K_1I пересекаются на медиане AM_1 треугольника ABC. Докажите!

Задача 20. Окружность с центром в точке I радиуса IC пересекает AB в точке P (P находится по одну сторону с вершиной A относительно прямой CK_3). N – середина PC. Докажите, что $N \in q$.