Когда эрудиция решает задачу!

Существует большое количество планиметрических задач, которые составлены с использованием нетривиальных, но важных геометрических фактов, свойств, теорем. Их знание позволяет решить ту или иную задачу быстро, красиво, эффективно! В противном случае решение может быть трудным, громоздким… а может и вовсе не состояться. Предлагаемая подборка призвана высветить формулу или свойство, которые могут сыграть главную роль в решении задачи. При этом на них будет дана только ссылка. Сами же формулы, свойства, факты, леммы предлагаем доказать самостоятельно или же найти в математической литературе.

Итак, приступаем к разговору на тему «Задачи, решаемые с помощью эрудиции!..»

1. Биссектрисы BL_2 и CL_3 треугольника ABC пересекаются в точке I. Прямая L_2L_3 пересекает продолжение стороны BC в точке Q. Докажите, что $\angle CAQ$ тупой.

Свойство. Прямая L_2L_3 пересекает продолжение BC в точке Q – основании внешней биссектрисы угла BAC.

Доказательство. Соединим вершину A с точками Q и I (рис.1). Поскольку AI – внутренняя биссектриса угла A и AQ – его внешняя биссектриса, то $\angle IAQ = 90°$. Тогда очевидно, что $\angle CAQ > 90°$, то есть тупой.

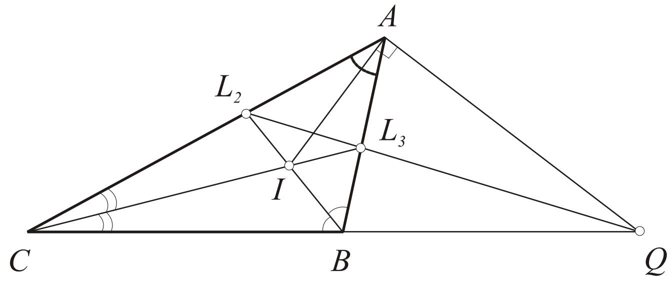

рис.1

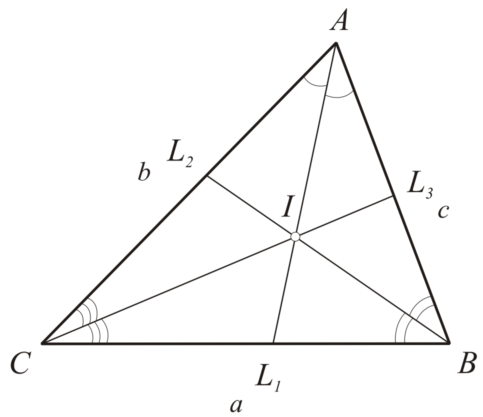

рис.2

2. Инцентр I треугольника ABC делит каждую из биссектрис AL_1; BL_2; CL_3 в отношении k:1 (рис.2). Найдите k и углы треугольника ABC.

Свойство. $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$. Аналогично $\frac{BI}{IL_2} = \frac{a+c}{b}$ и $\frac{CI}{IL_3} = \frac{a+b}{c}$.

Решение. Согласно условию и *свойству* инцентра имеем: $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$. Добавив ко всем частям по 1, получим: $\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{c}=k+1$, откуда $a = b = c$ и $k + 1 = 3$. Итак, $k = 2$ и ΔABC – равносторонний.

3. В треугольнике *ABC* угол *A* равен $120°$. Биссектриса этого угла при продолжении пересекает описанную около треугольника *ABC* окружность в точке *Q*. Докажите, что $AQ = b + c$ (рис.3).

Свойство. Для любой точки, описанной около равностороннего треугольника окружности сумма расстояний от этой точки до двух ближних вершин равна расстоянию от нее до третьей вершины.

Доказательство. Поскольку $\angle BAC = 120°$, то $\angle BQC = 60°$. $BQ = CQ$ – равные дуги стягиваются равными хордами. Равнобедренный треугольник с углом $60°$ является равносторонним. Так как ΔBQC – равносторонний, то, согласно *свойству,* $AQ = b + c$.

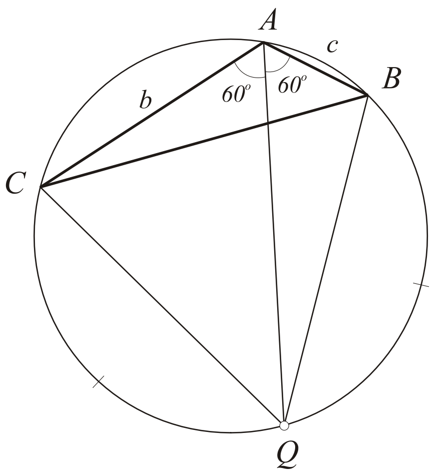

рис.3

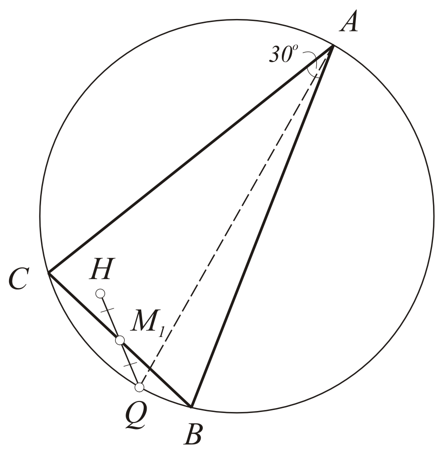

рис.4

4. *H* – ортоцентр, M_1 – середина стороны *BC* треугольника *ABC* с углом $A = 30°$. Отрезок HM_1 удвоили, продолжив его за точку M_1 $(HM_1 = M_1Q)$ – рис.4. Докажите, что $AQ = 2BC$.

Свойство. Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон лежат на описанной около этого треугольника окружности. Более того, они диаметрально противоположны соответствующим вершинам.

Доказательство. Согласно *свойству* отрезок *AQ* является диаметром описанной около ΔABC окружности. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A}=2R$, или $BC = 2R\cdot\sin 30° = R$. Так как $AQ = 2R$, то $AQ = 2BC$.

5. *Q* – произвольная точка описанной около треугольника *ABC* окружности. *K; N; T* – ее симметричные образы относительно *BC; AC* и *AB* соответственно. Докажите, что точки *K; N; T* принадлежат одной прямой.

Свойство. Для любой точки Q описанной около ΔABC окружности основания ее перпендикуляров (точки $D; E; F$), проведенных соответственно к сторонам $BC; AC$ и AB, лежат на одной прямой – *прямой Симсона*.

Доказательство. Согласно *прямой Симсона* точки $D; E; F$ лежат на одной прямой (рис.5). Тогда и точки N, K, T принадлежат одной прямой – так называемый «удвоенный» Симсон (EF – средняя линия в ΔNQT).

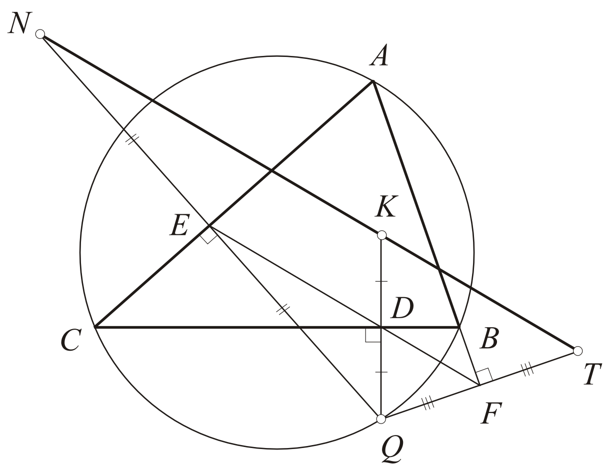

рис.5

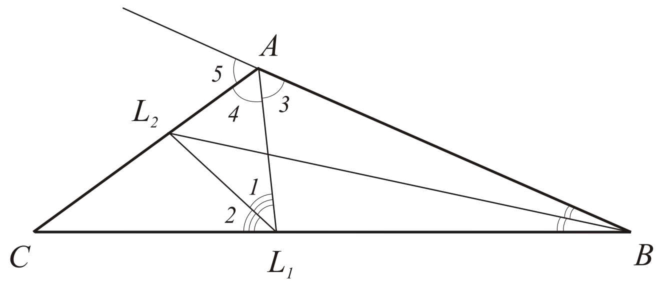

рис.6

6. AL_1 и BL_2 – биссектрисы в треугольнике ABC. Оказалось, что L_1L_2 – биссектриса в треугольнике AL_1C. Найдите величину угла A.

Свойство. В любом треугольнике две внешние биссектрисы и одна внутренняя пересекаются в одной точке.

Решение. По условию $\angle 1 = \angle 2$ (рис.6). Тогда для ΔABL_1 луч BL_2 совпадает с внутренней биссектрисой, а отрезок L_1L_2 является внешней биссектрисой в этом треугольнике. Следовательно, AL_2 – вторая внешняя биссектриса в ΔABL_1 – согласно *свойству*, то есть $\angle 4 = \angle 5$. Имеем: $\angle 3 = \angle 4 = \angle 5$ и $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$, откуда $A = \angle 3 + \angle 4 = 120°$.

7. Ортоцентр H равнобедренного треугольника ABC $(AB = AC)$ лежит на вписанной в этот треугольник окружности. Найдите величину угла при основании.

Свойство 1. Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, принадлежат описанной около этого треугольника окружности.

Свойство 2. Так называемая «теорема трилистника»: в произвольном треугольнике ABC выполняется равенство трех отрезков: $BQ = CQ = IQ$, гда I – инцентр треугольника ABC, Q – точка пересечения продолжения биссектрисы угла A с описанной около треугольника ABC окружностью (рис.7).

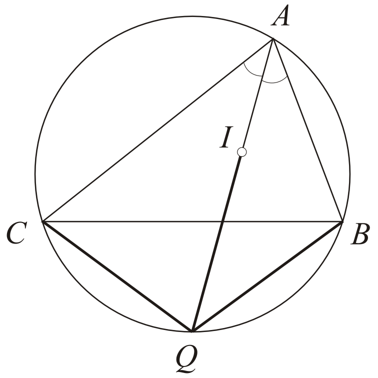

рис.7

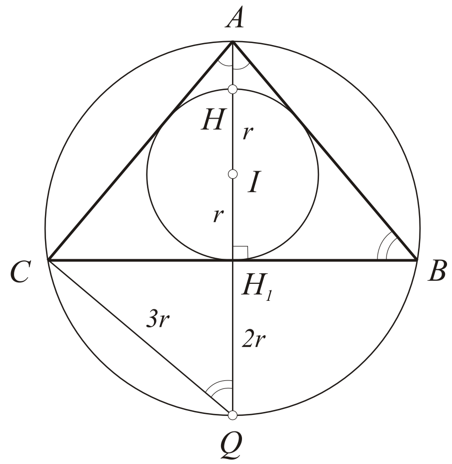

рис.8

Решение. Пусть высота AH_1, совпадающая с биссектрисой угла A, пересекает описанную окружность ΔABC в точке Q (рис.8). Согласно *свойству 1* $HH_1 = H_1Q = 2r$. Тогда $IQ = 3r$ ($IH_1 = r$). По *свойству 2* $CQ = IQ = 3r$. Из ΔCH_1Q: $\cos\angle CQH_1 = \dfrac{H_1Q}{CQ} = \dfrac{2r}{3r} = \dfrac{2}{3}$. Но

$\angle CQH_1 = B$ – вписанные, опираются на одну дугу. Поэтому $\cos B = \dfrac{2}{3}$ и $B = C = \arccos\dfrac{2}{3}$.

8. В треугольнике ABC биссектриса AL_1 делит пополам отрезок MH (M – центроид треугольника ABC, H – его ортоцентр). Найдите величину угла A в треугольнике ABC.

Свойство 1. Биссектриса угла A треугольника ABC совпадает с биссектрисой угла OAH_1 (O – центр описанной окружности треугольника ABC; AH_1 – высота в этом треугольнике).

Свойство 2. Указанные в задаче точки O; M; H лежат на одной прямой – *прямой Эйлера*, причем $2OM = MH$.

Свойство 3. Длина отрезка AH вычисляется по формуле: $AH = 2R\cdot|\cos A|$.

Решение. Пусть биссектриса AL_1 пересекает отрезок MH в точке T – его середине (рис.9). Согласно *свойству 2* $O - M - H$ – одна прямая и $OM = MT = TH$. По *свойству 1* $\angle 1 = \angle 2$. Тогда $\dfrac{OA}{AH} = \dfrac{OT}{TH} = \dfrac{2}{1}$ – свойство биссектрисы. Следовательно, $AH = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{1}{2}R$.

Свойство 3 дает следующее: $\dfrac{1}{2}R = 2R\cos A$, откуда $\cos A = \dfrac{1}{4}$ и $A = \arccos\dfrac{1}{4}$.

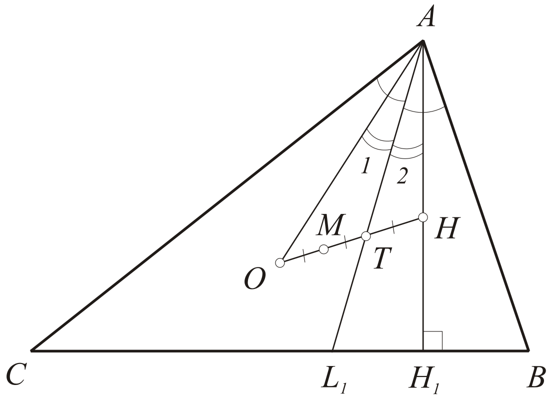

рис.9

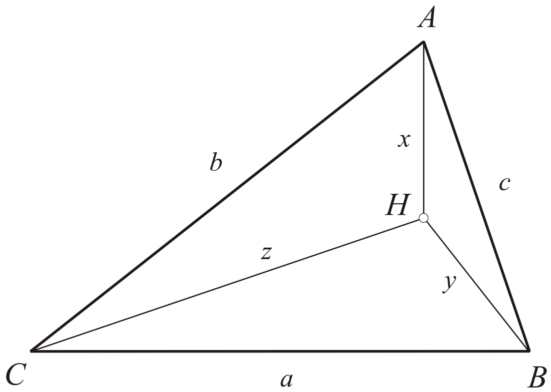

рис.10

9. *H* – ортоцентр остроугольного треугольника *ABC* со сторонами *BC = a; AC = b; AB = c*. Пусть *AH = x; BH = y; CH = z*. Докажите справедливость следующей формулы:
abc = ayz + bxz + cxy.

Свойство. Окружности, описанные около треугольников *BHC; CHA; AHB* имеют тот же радиус *R* описанных окружностей, что и окружность, описанная около треугольника *ABC*.

Решение. По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ имеем:

$abc = 4SR$

$ayz = 4S_{BHC}R$

$bxz = 4S_{CHA}R$ – согласно *свойству* $R_{BHC} = R_{CHA} = R_{AHB} = R$.

$cxy = 4S_{AHB}R$

Значит, $ayz + bxz + cxy = 4R(S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB}) = 4RS = abc$, что соответствует требуемому.

10. (А.Карлюченко) *I* – инцентр, *H* – ортоцентр остроугольного треугольника *ABC*. *T* – ортоцентр ΔBIC. Докажите, что *AH + IT = 2R* – диаметру описанной окружности треугольника *ABC*.

Свойство. Расстояние от центра описанной окружности до стороны треугольника в два раза меньше расстояния от противоположной вершины до ортоцентра.

Решение. В соответствии с указанным свойством $OM_1 = \dfrac{1}{2}AH$ (рис.11). Центром описанной около ΔBIC окружности является точка *Q* – согласно *свойству 2 задачи 7.* Тогда $QM_1 = \dfrac{1}{2}IT$ – аналог формулы $OM_1 = \dfrac{1}{2}AH$. Но *OQ = R* (*Q* принадлежит описанной окружности ΔABC). Следовательно, $AH + IT = 2(OM_1 + QM_1) = 2R$.

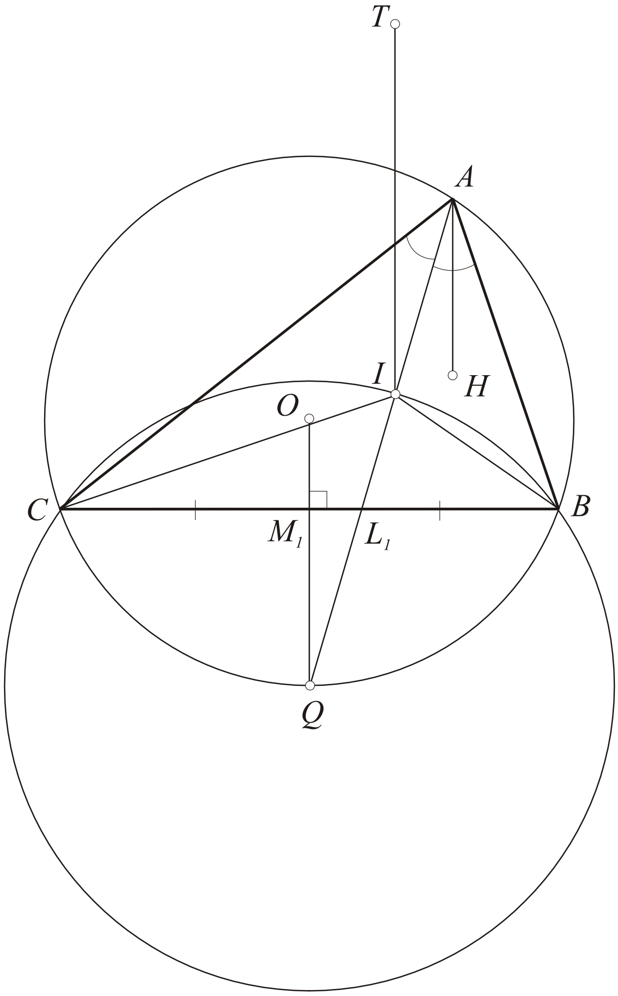

рис.11

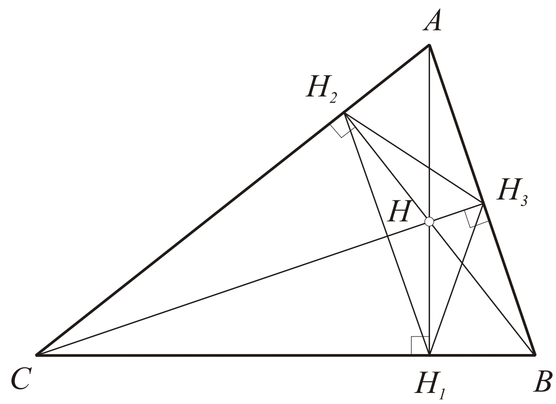

рис.12

11. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность, причем *AD* – ее диаметр. Диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *Q*. *T* – проекция точки *Q* на *AD*. Докажите, что *Q* – инцентр в треугольнике *BCT*.

Свойство. Пусть AH_1; BH_2; CH_3 – высоты остроугольного ΔABC, пересекающиеся в ортоцентре *H*. Тогда точка *H* является инцентром в треугольнике $H_1H_2H_3$ (так называемом ортоцентрическом треугольнике).

Доказательство. Пусть $F = AB \cap DC$. Поскольку $\angle ABD = \angle DCA = 90°$ (вписанные, опираются на диаметр), то *Q* – ортоцентр в ΔAFD (рис.13). Так как $QT \perp AD$, то точки *F; Q; T* принадлежат одной прямой. ΔBCT является ортоцентрическим для ΔAFD. Согласно *свойству Q* совпадает с инцентром ΔBCT.

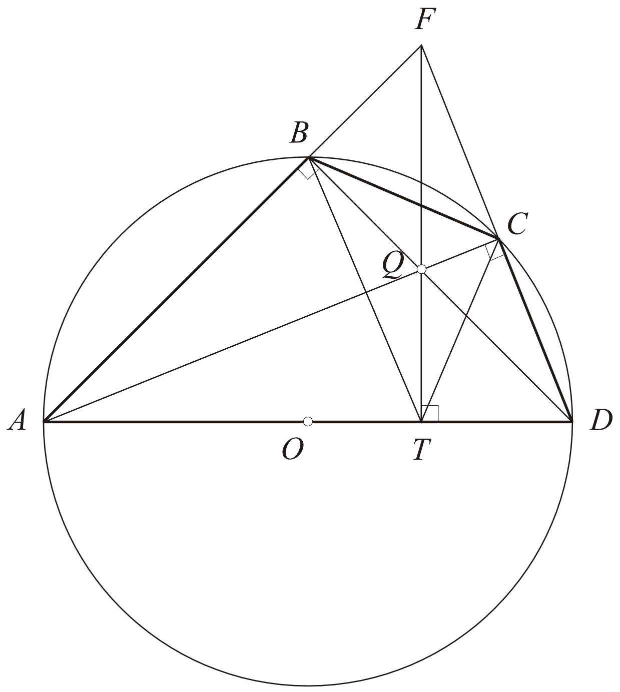

рис.13

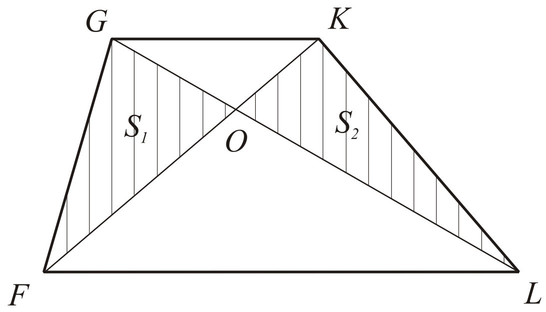

рис.14

12. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямые BA и CD пересекаются в точке Q, а прямые BC и AD – в точке N. Оказалось, что треугольники QBC и NAB равновелики. Докажите, что диагональ BD делит площадь $ABCD$ пополам.

Свойство 1. Если треугольники GOF и KOL равновелики ($S_1 = S_2$), то четырехугольник $FGKL$ – трапеция (рис.14).

Свойство 2. В любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой (лемма о трапеции).

Доказательство. Поскольку по условию $S_{QBC} = S_{NAB}$ и указанные треугольники содержат общую часть в виде четырехугольника $ABCD$, то $S_{QBD} = S_{NCD}$ (рис.15). В таком случае, согласно *свойству 1* $QACN$ – трапеция ($AC \parallel QN$). По *свойству 2* прямая BD проходит через точки P и T – середины AC и QN соответственно. Так как медиана треугольника делит его площадь пополам, то $S_{ABP} = S_{CBP}$ и $S_{APD} = S_{CPD}$. Значит, $S_{ABD} = S_{CBD}$, что соответствует требуемому.

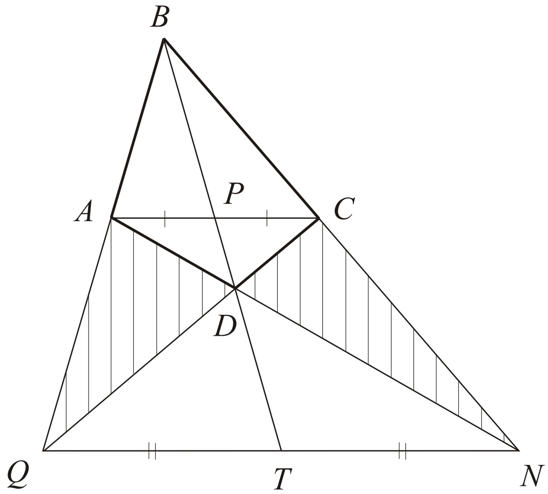

рис.15

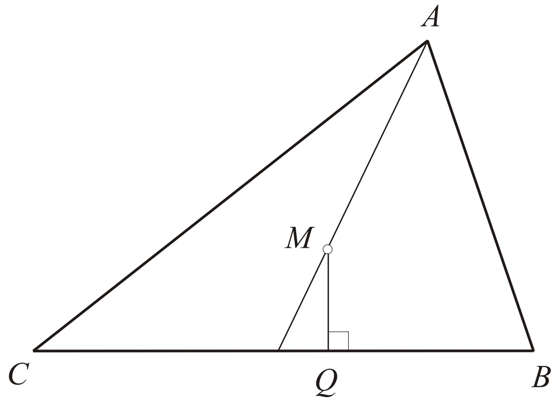

рис.16

13. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, у которого сумма квадратов сторон наибольшая.

Свойство. Для отрезка *OH*, соединяющего центр описанной окружности с ортоцентром, справедлива формула: $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, где *a, b, c* – стороны треугольника *ABC;* *R* – радиус описанной около него окружности.

Решение. Воспользуемся указанным *свойством*. Очевидно, *R = const*. Тогда наибольшее значение суммы $a^2 + b^2 + c^2$ достигается в случае *OH = 0* Точки *O* и *H* совпадают только в равностороннем треугольнике. Поэтому *ответ*: равносторонний треугольник.

14. На стороне *BC* данного треугольника *ABC* найдите точку *Q* такую, что сумма квадратов расстояний от нее до вершин треугольника *ABC* минимальна.

Свойство. (теорема Лейбница) Для любой точки *X* в плоскости ΔABC справедлива формула: $XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2$, где *M* – центроид, точка пересечения медиан треугольника.

Решение. Согласно теореме Лейбница для точки *Q* имеем:
$QA^2 + QB^2 + QC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3QM^2$. Очевидно, сумма $MA^2 + MB^2 + MC^2$ для данного треугольника постоянна. Действительно,
$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \dfrac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \dfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$. Тогда искомая сумма минимальна, когда минимальна длина отрезка *QM*. Поэтому для нахождения точки *Q* необходимо из центроида *M* провести перпендикуляр к стороне *BC* (рис.16).

15. (Эрдеш) Пусть h_a – наибольшая высота в остроугольном треугольнике *ABC*. *R* и *r* – соответственно радиусы описанной и вписанной в треугольник *ABC* окружностей. Докажите, что $R + r \le h_a$.

Свойство. Сумма расстояний от центра описанной окружности остроугольного треугольника *ABC* до его сторон связана с радиусами *R* и *r* описанной и вписанной в этот треугольник окружностей такой формулой: $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$ (формула Карно) – рис.17.

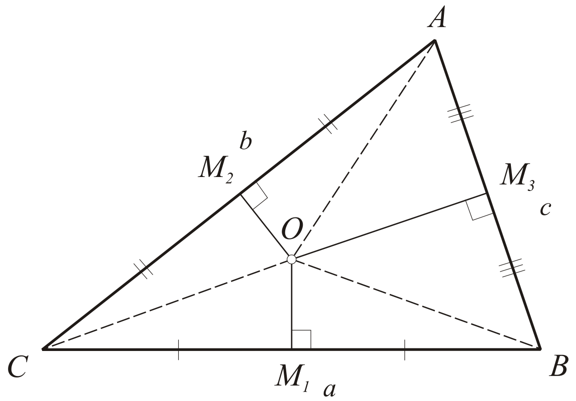

рис.17

Доказательство. Необходимо доказать, что $R + r \le h_a$ или $(R + r) \cdot a \le h_a \cdot a = 2S$. Согласно формуле Карно $R + r = OM_1 + OM_2 + OM_3$. Так как площадь ΔABC получается сложением площадей треугольников *BOC; COA; AOB*, то

$$2S = OM_1 \cdot a + OM_2 \cdot b + OM_3 \cdot c.$$

Итак, необходимо доказать, что

$$(OM_1 + OM_2 + OM_3) \cdot a \le OM_1 \cdot a + OM_2 \cdot b + OM_3 \cdot c,$$

или

$$OM_2 \cdot a + OM_3 \cdot a \le OM_2 \cdot b + OM_3 \cdot c.$$

Поскольку h_a – наибольшая высота, то сторона a – наименьшая. Тогда $OM_2 \cdot a \le OM_2 \cdot b$ и $OM_3 \cdot a \le OM_3 \cdot c$. Неравенство доказано!..

Несколько задач, решаемых с помощью эрудиции, предложим для самостоятельного решения. В конце укажем *свойства,* приводящие к быстрому, эффективному решению.