Угол и точка внутри угла.

Задачи на построение.

Речь в статье пойдет о конструкции, в которой дан острый угол A и точка X внутри него. Необходимо построить (найти) точки B и C на сторонах угла, отвечающие некоторому условию.

Подобные задачи нередко участвуют в олимпиадах различного уровня и других математических соревнованиях. Некоторые из них довольно знамениты и даже стали фольклором.

Заметим, что случаи, когда угол A тупой, принципиальных отличий не несут, их можно рассмотреть самостоятельно.

В статье предпринята попытка создать коллекцию таких задач, которая позволит более широко, цельно взглянуть на эту конструкцию, поможет увидеть разнообразие (а в чем-то и общность) подходов к таким задачам, что представляется полезным как на уроках в математических классах, так и во время факультативных занятий.

Дабы не повторяться, подчеркнем: условия всех задач начинаются словами *«Дан острый угол A и точка X внутри угла. Постройте на сторонах угла точки B и C такие, чтобы…»*.

Задача 1. соблюдалось равенство отрезков $AB = BX = XC$.

Решение.

Соединяем A и X *(рис.1)*. Серединный перпендикуляр к отрезку AX в пересечении со стороной угла дает точку B. Засечка из точки X раствором циркуля, равным $AB = BX$, позволит получить точку C на другой стороне угла.

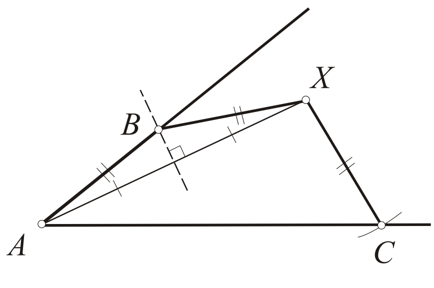

рис.1

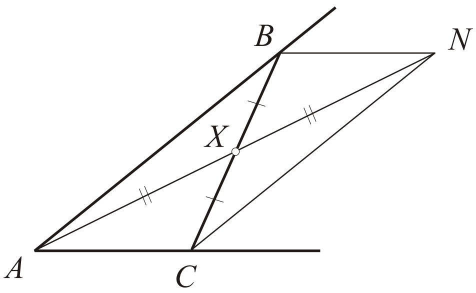

рис.2

Задача 2. Точка X была серединой отрезка BC.

Решение.

Удвоим отрезок AX – получим точку N *(рис.2)*. Через N проведем прямые параллельно сторонам угла. В пересечении получим искомые точки B и C. Действительно, $ABNC$ – параллелограмм. BC – его диагональ, а X – точка пересечения диагоналей.

Задача 3.

$\frac{BX}{XC} = \frac{m}{n}$, где точка X принадлежит отрезку BC. *(И.Ньютон)*

Решение.

Проводим XK параллельно одной из сторон угла *(рис.3)*. Находим на этой же стороне угла точку B таким образом, чтобы $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{n}{m}$ (построением определяем длину отрезка $KB = \dfrac{AK \cdot m}{n}$). Луч BX пересекает другую сторону угла в искомой точке C (согласно *теореме Фалеса*).

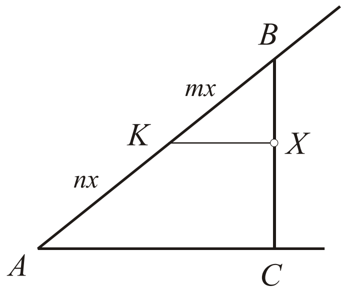

рис.3

Задача 4.

Точка X была ортоцентром (точкой пересечения высот) в треугольнике ABC.

<u>*Решение.*</u>

Через X проводим прямые перпендикулярно сторонам угла – получим точки B и B_1; C и C_1 *(рис.4)*. Соединим B и C. Очевидно, BB_1 и CC_1 – высоты в ΔABC. Тогда и третья высота AA_1 проходит через X, то есть X – ортоцентр в ΔABC.

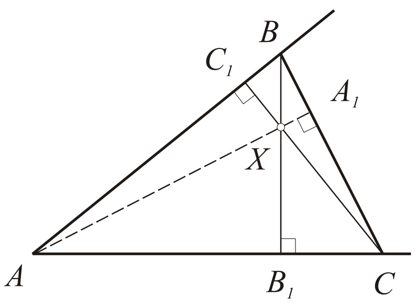

рис.4

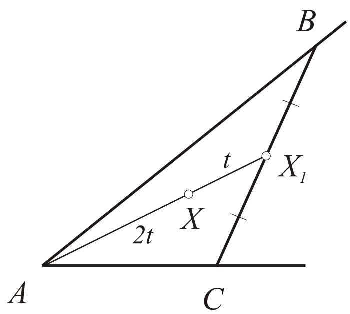

рис.5

Задача 5.

Точка X была центроидом (точкой пересечения медиан) в треугольнике ABC.

<u>*Решение.*</u>

Продлеваем отрезок AX (за точку X) наполовину – получаем точку X_1 *(рис.5)*. Для точки X_1 выполняем *задачу 2* и получаем искомые точки B и C на сторонах угла. Действительно, AX_1 – медиана в ΔABC и, поскольку $AX : XX_1 = 2:1$, то X – центроид в этом треугольнике.

Задача 6.

Треугольник XBC имел наименьший периметр из всех возможных.

<u>*Решение.*</u>

Пусть E и F – точки, симметричные X относительно сторон угла *(рис.6)*. Прямая EF пересекает стороны угла A в искомых точках B и C. И вот почему. Периметр ΔXBC равен длине отрезка EF (так как $BX = BE$ и $CX = CF$). Периметр же любого другого треугольника, например, ΔXKN, равен длине ломаной $EKNF$. А длина ломаной больше длины отрезка. Стало быть, ΔXBC имеет минимальный периметр.

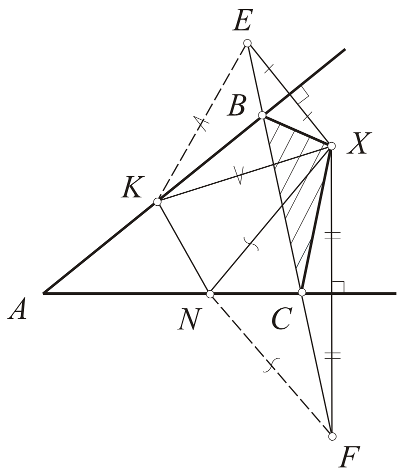

рис.6

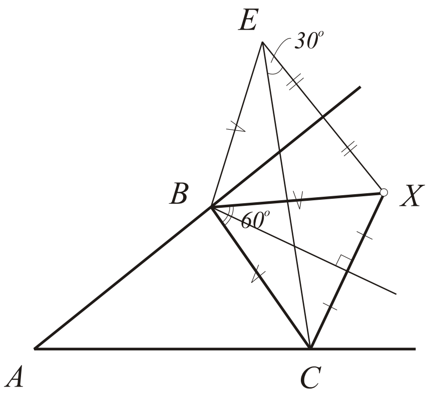

рис.7

Задача 7.

Треугольник *XBC* был равносторонним.

<u>*Решение.*</u>

Пусть точка *E* симметрична точке *X* относительно одной из сторон угла *(рис.7)*. Из точки *E* под углом $30°$ к *XE* пускаем луч, который пересечет другую сторону угла *A* в точке *C*. Серединный перпендикуляр к *XC* в пересечении с другой стороной угла дает недостающую точку *B*. Покажем это. *BX* = *BE* = *BC* (из соображений симметрии). Тогда точка *B* – центр описанной окружности ΔEXC. Поскольку $\angle XEC = 30°$, то $\angle XBC = 60°$ (центральный). Равнобедренный ΔXBC с углом $60°$ является равносторонним.

Задача 8.

Окружность *ω*, проходящая через *X* и касающаяся сторон угла *A*, касалась их именно в точках *B* и *C*.

<u>*Решение.*</u> *(Юрий Билецкий)*

Проведем биссектрису *l* угла *A*. Очевидно, центр *O* окружности *ω* находится на ней *(рис.8)*. Пусть *N* – точка, симметричная *X* относительно *l*. При этом $N \in \omega$. Пусть также прямая *XN* пересекает одну из сторон угла в точке *T*. Тогда по теореме о квадрате касательной имеем: $TB^2 = TN \cdot TX$, или $TB = \sqrt{TN \cdot TX}$. Это позволяет нам найти длину отрезка *TB*, а значит, и точку *B* (или B_1, как показано на рисунке). Так как *AB* = *AC* *(касательные)*, то и положение точки *C* найдено.

<u>Замечание.</u> Классическое решение этой задачи подразумевает использование гомотетии. Выполните его самостоятельно.

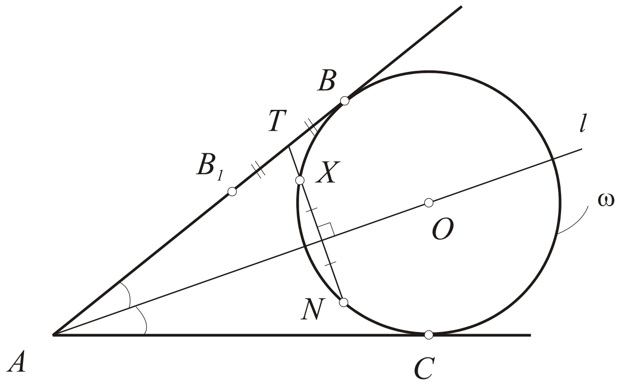

рис.8

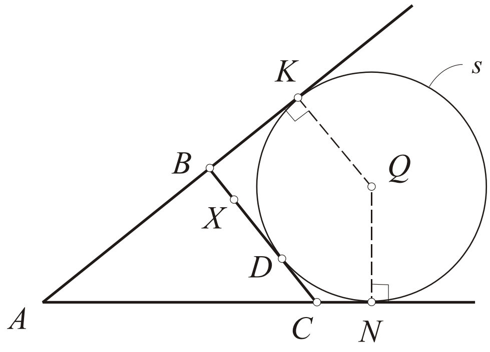

рис.9

Задача 9.

Треугольник *ABC* был заданного периметра *2p*.

<u>*Решение.*</u>

На сторонах угла *A* откладываем точки *K* и *N* такие, что *AK* = *AN* = *p (рис.9)*. Восстановив перпендикуляры в этих точках к сторонам угла, получим в пересечении точку *Q* – центр окружности *s*, вписанной в угол *A* (*K* и *N* – точки касания). Через точку *X* проведем касательную к окружности *s* (*D* – точка касания), которая при продолжении пересекает стороны угла в искомых точках *B* и *C*. Действительно, $AB+BD=AK=p$ и $AC+CD=AN=p$. Следовательно, периметр треугольника *ABC* равен *2p*.

Задача 10.

Треугольник *ABC* был минимального периметра ($X \in BC$).

<u>*Решение.*</u>

Впишем в угол *A* окружность *ω*, проходящую через точку *X (аналогично задаче 8)*. Пусть она касается сторон угла в точках *E* и *F (рис.10)*. Через *X* проведем касательную к *ω*. Она пересечет стороны угла *A* в искомых точках *B* и *C*. Покажем, что ΔABC будет иметь минимальный периметр. Пусть это будет какой-то другой треугольник, например, ΔAKN . Проведем касательную *TQ* к окружности *ω* параллельно *KN*. Нетрудно показать, что равны периметры ΔABC и ΔATQ (они равны *AE* + *AF* каждый). А периметр ΔAKN , очевидно, больше периметра ΔATQ . Стало быть, периметр ΔABC минимален.

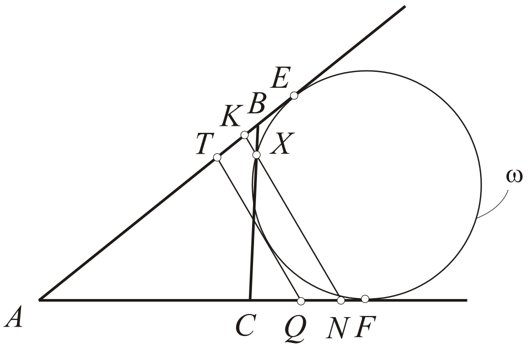

рис.10

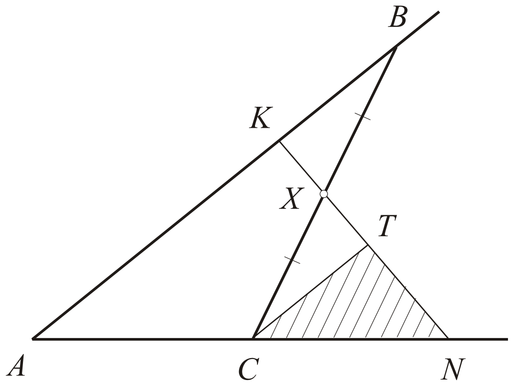

рис.11

Задача 11.

Треугольник *ABC* имел минимальную площадь ($X \in BC$).

<u>*Решение.*</u>

Построим точки *B* и *C* на сторонах угла *A* таким образом, чтобы точка *X* была серединой отрезка *BC (задача 2)*. ΔABC и будет искомым. Он будет иметь площадь меньшую, чем, скажем, ΔAKN *(рис.11)* как раз на «кусочек» заштрихованной площади ΔCTN , где $CT \parallel AB$.

Задача 12.

Угол *BXC* был прямым, а треугольники *ABX* и *ACX* были равновелики.

<u>*Решение.*</u>

Вновь, как в *задаче 2*, находим на сторонах угла *A* точки *E* и *F* такие, что *X* – середина *EF (рис.12)*. Биссектрисы углов *AXE* и *AXF* в пересечении со сторонами угла дадут искомые точки *B* и *C*. Покажем это. $\angle BXC = 90°$ (угол между биссектрисами смежных углов). Так как *AX* – медиана в ΔAEF , то $S_{ABX} = S_{ACX}$ *(покажите самостоятельно)*.

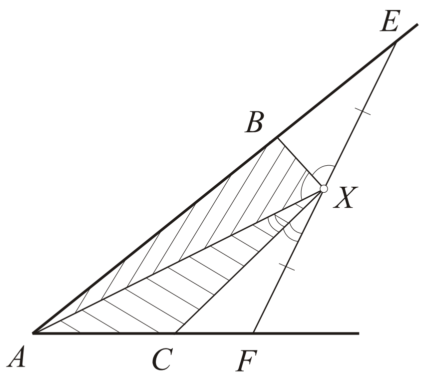

рис.12

Задача 13.

AB = *AC* и сумма *XB* + *XC* была минимальной.

<u>*Решение.*</u>

Проведем анализ решения задачи. Пусть точки B_1 и C_1 – такие, что $AB_1 = AC_1$. Повернем ΔAB_1X на угол *A* по часовой стрелке. Тогда отрезок AB_1 перейдет в AC_1; отрезок B_1X – в отрезок C_1N и ΔAB_1X – в ΔAC_1N *(рис.13)*. Очевидно, $XB_1 + XC_1 = XC_1 + C_1N \ge XN$ (неравенство треугольника для ΔXC_1N). Тогда *XN* пересекает луч *AC*, в искомой

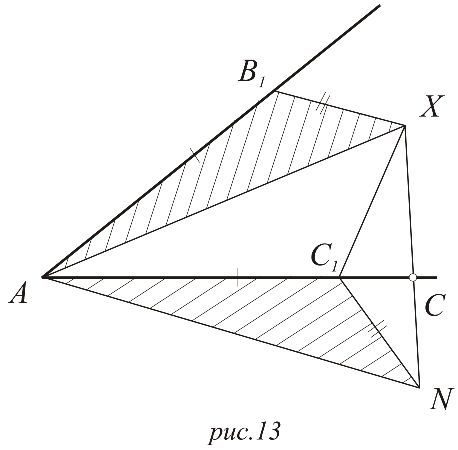

рис.13

точке C ($XC + CN \le XC_1 + C_1N = XB_1 + XC_1$). Итак, строим $AN = AX$, где $\angle XAN = \angle BAC$. Тогда XN пересекает сторону угла в точке C. Остается на другой стороне угла отложить $AB = AC$.

Задача 14.

Сумма $AB + AC$ равнялась данному отрезку a ($X \in BC$).

Решение. *(Алексей Карлюченко)*

Вновь проведем анализ задачи. Пусть B и C – искомые точки ($AB + AC = a$). Отложим на луче AC отрезок $AK = AB$, а на луче AB – отрезок $AN = AC$ *(рис.14)*. Тогда $AK + AN = a$. Пусть также $AT = AQ = \dfrac{a}{2}$. Очевидно, $BNCK$ – равнобокая трапеция и TQ – средняя линия в ней *(покажите!)*. Опишем окружность ω около $BNCK$. Поскольку T и Q – соответственно середины хорд BN и CK, то перпендикуляры к хордам в этих точках пересекутся в центре окружности ω – точке O. Пусть BC пересекает TQ в точке F. Тогда $BF = FC$ (так как TQ – средняя линия в трапеции $BNCK$). Следовательно, $OF \perp BC$, то есть $\angle OFX = 90°$.

Отсюда построение. Находим точки T и Q ($AT = AQ = \dfrac{a}{2}$). Восстанавливаем в них перпендикуляры к сторонам угла – получаем точку O. На отрезке OX как на диаметре строим окружность, которая пересекает TQ в точке F (или F_1). Прямая XF (или XF_1) пересекает стороны угла в искомых точках B и C.

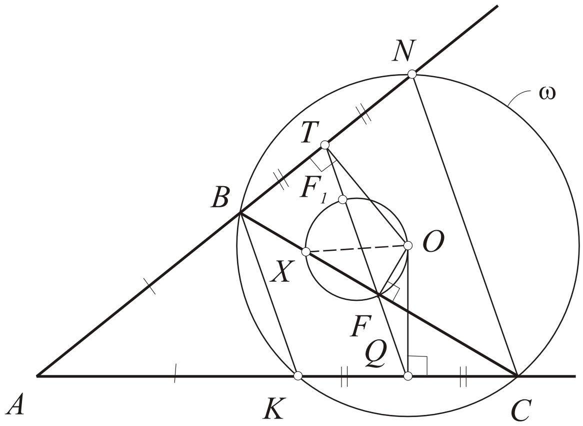

рис.14

Несколько задач на данную конструкцию предлагаем решить самостоятельно.

Задача 15. $AB = AC$ и $X \in BC$.

Задача 16. X была центром описанной окружности ΔABC.

Задача 17. Отрезок XA был диаметром окружности, описанной около ΔABC.

Задача 18. $XB = CB$, где $\angle CBA = 90°$.

Задача 19. Окружность с центром в точке X давала хорду BC, параллельную заданному направлению.

Задача 20. Сумма $AB + AC$ была минимальной ($X \in BC$).

А.Карлюченко
Г.Филипповский