Хорда AW в задачах и формулах

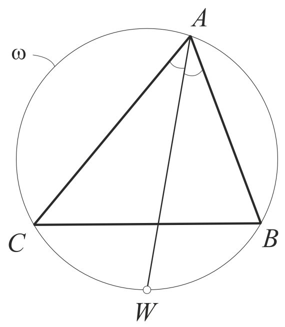

рис.1

Пусть биссектриса угла *A* в треугольнике *ABC* при продолжении пересекает описанную около него окружность ω в точке *W (рис.1)*. Хорда *AW* окружности ω обладает рядом полезных, важных свойств и формул, которые делают эту хорду активной участницей разнообразных задач, включая конкурсные и олимпиадные. Поэтому представляется уместным повести обстоятельный разговор о хорде *AW*.

Задача 1.

Хорда *AW* делит пополам угол OAH_1, где *O* – центр описанной окружности треугольника *ABC*, AH_1 – высота в этом треугольнике. Докажите!

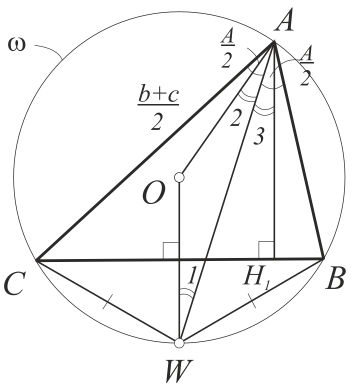

рис.2

Доказательство.

Очевидно, *BW* = *CW* – как хорды в окружности ω, стягивающие равные дуги. Тогда радиус $OW \perp BC$ *(рис.2)*. Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (*OA* = *OW* = *R*) и $\angle 1 = \angle 3$ – внутренние накрест лежащие при параллельных прямых *OW* и AH_1, $\angle 2 = \angle 3$ и *AW* – биссектриса $\angle OAH_1$.

Замечание. Все остается в силе и в случае тупоугольного треугольника *ABC*. Убедитесь в этом самостоятельно.

Задача 2.

В треугольнике *ABC* стороны *AC* и *AB* соотвестветвенно равны *b* и *c*. *AK* – проекция хорды *AW* на сторону *AC*. Докажите, что $AK = \dfrac{b+c}{2}$ и $CK = \dfrac{b-c}{2}$.

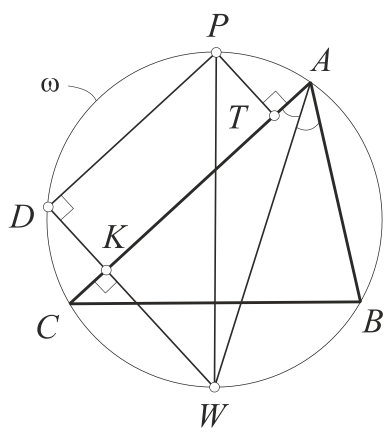

рис.3

Доказательство.

Продолжим *WK* до пересечения с ω в точке *D* и проведем $DP \parallel AC$ *(рис.3)*. Тогда *PW* – диаметр ω ($\angle PDW = 90°$), а *CDPA* – равнобокая трапеция, так как она вписана в окружность ω.

Тогда и дуги *CD* и *AP* – равны. Но $\cup PAB = \cup PDC$ (*PW* – диаметр ω). Следовательно, $\cup DP = \cup AB$. Равны и стягивающие их хорды: *DP* = *AB* = *c*. Проведем $PT \perp AC$. Поскольку *PTKD* – прямоугольник, то *KT* = *DP* = *c*. *AT* = *CK* (*CDPA* – равнобокая трапеция).

AT + *CK* = *AC* – *TK* =*b* – *c* (считаем, что *b* > *c*). Значит, $CK = \dfrac{b-c}{2}$;

$$AK = b - \frac{b-c}{2} = \frac{b+c}{2}.$$

Задача 3.

Докажите справедливость формулы для хорды *AW*: $\boxed{AW = \dfrac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}}$.

Доказательство.

Проведем $WK \perp AC$. Согласно *задаче 2* $AK = \dfrac{b+c}{2}$ *(рис.4)*. Тогда из прямоугольного ΔAKW получаем: $AW = \dfrac{AK}{\cos\frac{A}{2}}$, или $AW = \dfrac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}$.

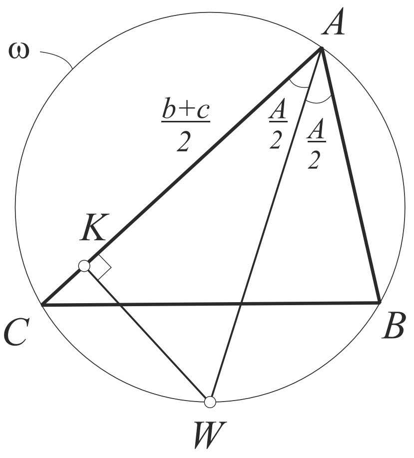

рис.4

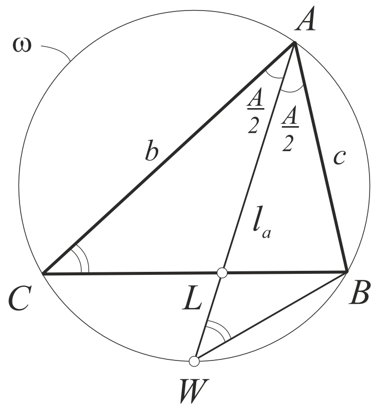

рис.5

Задача 4.

С помощью хорды AW докажите формулу биссектрисы: $\boxed{l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}}$.

Доказательство.

Пусть $AL = l_a$ – биссектриса угла A треугольника ABC. Поскольку $\angle AWB = \angle ACB$ – вписанные, опираются на одну дугу в окружности ω, описанной около ΔABC *(рис.5)*, то $\Delta AWB \sim \Delta ACL$. Из этого подобия следует: $\dfrac{l_a}{c} = \dfrac{b}{AW}$, откуда $l_a = \dfrac{bc}{AW}$. Воспользовавшись формулой *задачи 3*, получаем:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Задача 5.

Из точки L – основания биссектрисы угла A треугольника ABC – проведены перпендикуляры LF и LN, к сторонам AC и AB соответственно *(рис.6)*. Докажите, что площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $\boxed{S = \dfrac{1}{2}AW \cdot FN}$ *(Международные олимпиады)*

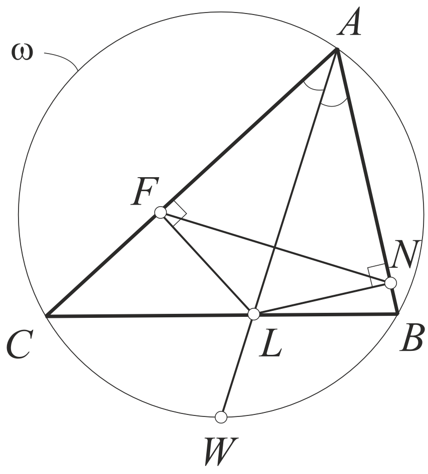

рис.6

Доказательство.

Около четырехугольника $AFLN$ можно описать окружность (два противоположных угла равны по 90º) с диаметром $AL = l_a$. Тогда по теореме синусов: $\dfrac{FN}{\sin A} = l_a$, откуда $FN = l_a \cdot \sin A$.

В то же время $AW = \dfrac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}$ *(задача 3)*. Следовательно, $\dfrac{1}{2}AW \cdot FN = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}\cdot l_a \cdot \sin A$.

С учетом формулы биссектрисы $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$ *(задача 4)* получаем:

$\dfrac{1}{2}AW \cdot FN = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}} \cdot \dfrac{2bc}{b+c} \cdot \cos\dfrac{A}{2} \cdot \sin A$, или $\dfrac{1}{2}AW \cdot FN = \dfrac{1}{2}bc \cdot \sin A = S$,

что и требовалось доказать!..

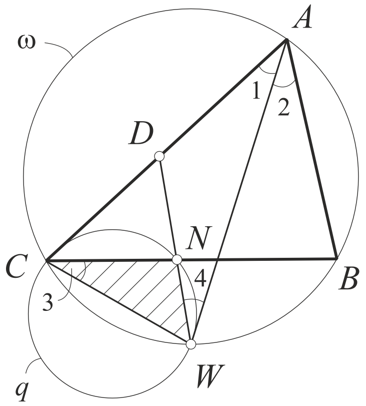

рис.7

Задача 6.

Отрезок *WD*, проведенный параллельно *AB*, пересекает *BC* в точке *N* *(рис.7)*. Докажите, что хорда *AW* касается окружности *q*, описанной около треугольника *CNW*.

Доказательство.

Пусть $\angle 1 = \angle 2 = \dfrac{A}{2}$ и $\angle 3 = \angle 2$ – вписанные, опираются на одну дугу в окружности ω. $\angle 4 = \angle 2 = \dfrac{A}{2}$ – внутренние накрест лежащие (*WD* || *AB*). Поскольку $\angle 4 = \angle 3$, то *AW* – касательная к окружности *q*.

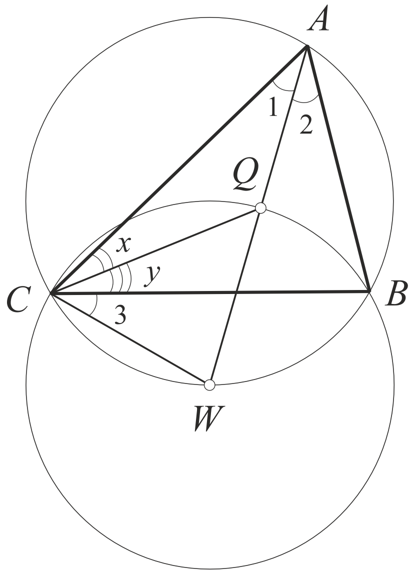

рис.8

Задача 7.

Если из точки *W* как из центра раствором циркуля, равным *WB* = *WC* провести окружность, то она пересечет хорду *AW* в точке *I* – инцентре треугольника *ABC*. Докажите!

Доказательство.

Пусть проведенная окружность пересекает *AW* в точке *Q*. Соединим *C* и *Q*. Пусть также углы *ACQ* и *BCQ* соответственно равны *x* и *y* *(рис.8)*. Очевидно, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \dfrac{A}{2}$. Тогда $\angle CQW = \angle 1 + x$ (внешний для ΔAQC). А $\angle QCW = \angle 3 + y$. Так как *WQ* = *WC* (радиусы проведенной окружности), то получаем: $\angle 1 + x = \angle 3 + y$, или $\dfrac{A}{2} + x = \dfrac{A}{2} + y$, откуда $x = y$ и CQ – биссектриса $\angle ABC$. То есть, $Q \equiv I$.

<u>Замечание.</u> Фактически мы сейчас доказали «теорему трилистника»: *IW* = *BW* = *CW*.

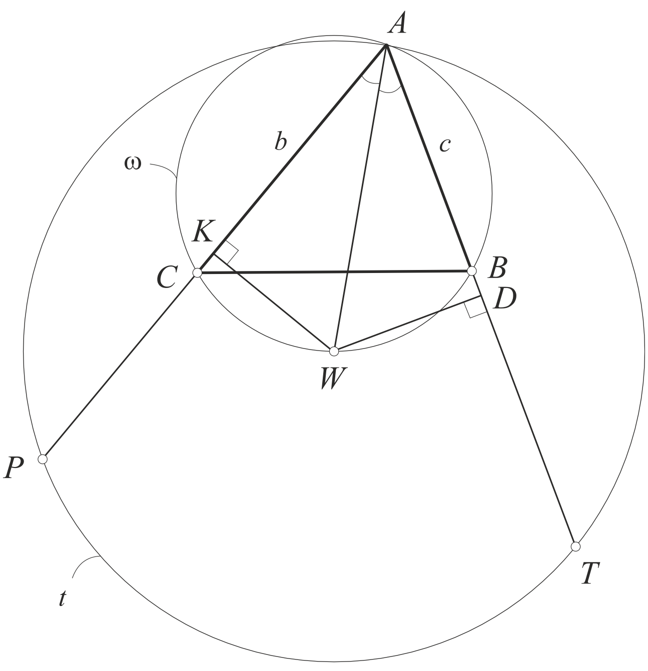

рис.9

Задача 8.

Окружность *t* с центром *W* радиуса *WA* пересекает прямые *AB* и *AC* в точках *T* и *P* соответственно *(рис.9)*. Докажите, что *PC* = *c*, *BT* = *b*.

Доказательство.

Проведем $WK \perp AC$ и $WD \perp AB$. Очевидно, $WK = WD$. Но $AK = \dfrac{b+c}{2}$ *(задача 2)*. Тогда *AP* = *b* + *c* (диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам). Поскольку *AC* = *b*, то *PC* = *c*. Аналогично *AT* = *b* + *c*, и *AB* = *c*, тогда *TB* = *b*.

Задача 9.

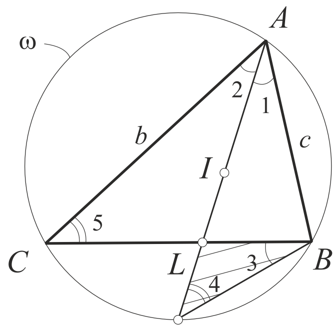

рис.10

Докажите, что $\dfrac{AW}{IW}=\dfrac{b+c}{a}$.

Доказательство.

Поскольку $\angle 2=\angle 3$ – вписанные, опираются на одну дугу в окружности ω, и $\angle 4=\angle 5$ – аналогично, то $\Delta BWL \sim \Delta AWB$ *(рис.10)*. Тогда $\dfrac{AW}{BW}=\dfrac{c}{BL}$ *(1)*.

Найдем длину отрезка BL. По свойству биссектрисы угла A $\dfrac{c}{b}=\dfrac{BL}{CL}$, где $CL=a-BL$. Получаем: $\dfrac{c}{b}=\dfrac{BL}{a-BL}$, откуда $BL=\dfrac{ac}{b+c}$. Подставим в *(1)*. $\dfrac{AW}{BW}=\dfrac{c(b+c)}{ac}$, или $\dfrac{AW}{BW}=\dfrac{b+c}{a}$. Поскольку $BW = CW = IW$ *(задача 7)*, то $\dfrac{AW}{IW}=\dfrac{b+c}{a}$.

Задача 10.

Докажите справедливость формулы: $\boxed{AW^2=IW^2+bc}$.

Доказательство.

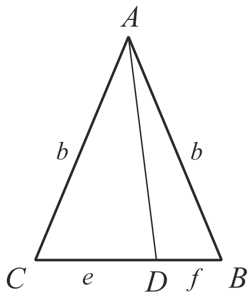

рис.11

Для доказательства воспользуемся следующим свойством равнобедренного треугольника: пусть в ΔABC $AB = AC = b$. Точка D делит основание BC на отрезки e и f *(рис.11)*. Тогда $\boxed{AD^2=b^2-ef}$. Для доказательства следует провести высоту из вершины A и дважды воспользоваться теоремой Пифагора.

Перейдем к доказательству формулы. Обозначим биссектрису $AL = l_a$, $LW = t$, $CL = x$ и $BL = y$ *(рис.12)*. $AW^2=(l_a+t)^2=l_a^2+2l_a\cdot t+t^2$

.

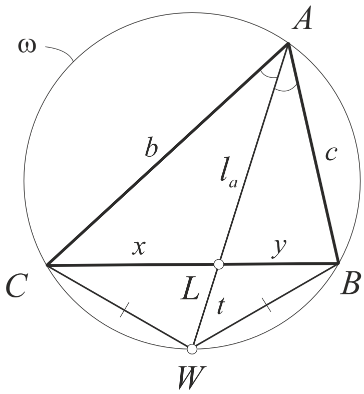

рис.12

По формуле биссектрисы $l_a^2=bc-xy$. По теореме о произведении отрезков хорд $l_a\cdot t=xy$. А согласно свойству равнобедренного треугольника для ΔBWC $(BW = CW)$ $t^2 = BW^2 - xy$ или $t^2 = IW^2 - xy$, поскольку $BW = CW = IW$.

Значит, $AW^2=bc-xy+2xy+IW^2-xy$. После сокращений получаем: $AW^2 = IW^2 + bc$.

Задача 11.

Докажите, что $\boxed{\dfrac{AW}{LW}=\left(\dfrac{b+c}{a}\right)^2}$.

Доказательство.

Очевидно, $\angle 1=\angle 3$ и $\angle 4=\angle 5$ – вписанные, опираются попарно на одну дугу в окружности ω *(рис.13)*. То есть, $\Delta ACL \sim \Delta BWL$ – по двум углам.

Значит, $\dfrac{b}{CL}=\dfrac{BW}{LW}$. Но $CL = BC - BL$, где $BC = a$ и $BL=\dfrac{ac}{b+c}$ *(задача 9)*.

Следовательно, $CL = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}$. Получаем: $\frac{BW}{LW} = \frac{b(b+c)}{ab} = \frac{b+c}{a}$.

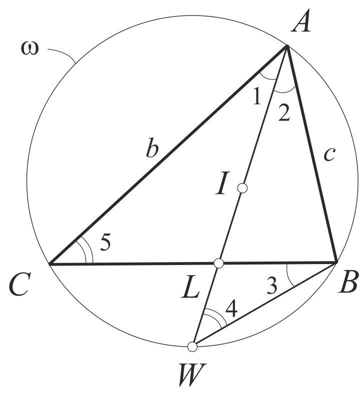

рис.13

Заменим BW на IW. Тогда $\boxed{\frac{IW}{LW} = \frac{b+c}{a}}$.

Запишем требуемое отношение $\frac{AW}{LW}$ таким образом: $\frac{AW}{LW} = \frac{AW}{IW} \cdot \frac{IW}{LW}$.

Так как $\frac{AW}{IW} = \frac{b+c}{a}$ *(задача 9)*, то $\boxed{\frac{AW}{LW} = \left(\frac{b+c}{a}\right)^2}$.

Задача 12.

Известно, что в треугольнике ABC хорда $AW = R + 2r$. Докажите, что либо $A = 60^\circ$, либо $h_a = \frac{R}{2} + r$.

Доказательство.

Поскольку $AW = AI + IW = R + 2r$, то найдем произведение $AI \cdot IW$. Из ΔAIK находим: $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ *(рис.14)*. По теореме синусов для ΔABW:

$\frac{BW}{\sin\frac{A}{2}} = 2R$. Но $BW = IW$, тогда $IW = 2R \cdot \sin\frac{A}{2}$. Следовательно,

$AI \cdot IW = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot 2R \cdot \sin\frac{A}{2} = 2Rr$.

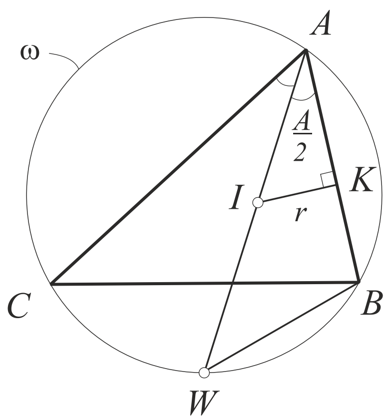

рис.14

Итак, мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases} AI + IW = R + 2r \\ AI \cdot IW = 2Rr \end{cases}.$$

Очевидно, ее решениями являются: 1) $AI = 2r;\ IW = R;$ 2) $AI = R;\ IW = 2r$.

В первом случае, когда $AI = 2r$, из ΔAIK находим: $\frac{A}{2} = 30^\circ$ и $\boxed{A = 60^\circ}$.

Во втором случае $IW = 2r$ и, с учетом формулы $\frac{AW}{IW} = \frac{b+c}{a}$ *(задача 9)*, получаем: $\frac{R+2r}{2r} = \frac{b+c}{a}$.

Добавим к обоим частям равенства по 1: $\frac{R+4r}{2r} = \frac{2p}{a}$. Или $R + 4r = \frac{4S}{a}$, $R + 4r = \frac{2ah_a}{a}$, откуда

$\boxed{h_a = \frac{R}{2} + 2r}$.

Задача 13.

Окружность q касается стороны BC, хорды AW и окружности ω, описанной около треугольника ABC. Причем, хорды AW она касается в точке P. Докажите, что P совпадает с инцентром I треугольника ABC.

Доказетельство.

Пусть q касается ω в точке T, а стороны BC – в точке F *(рис.15)*. Тогда точки $T; F; W$ лежат на одной прямой – *по лемме Архимеда (покажите!)*.

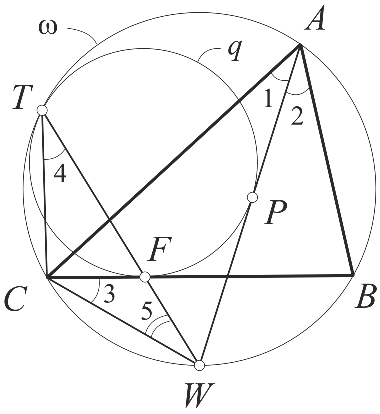

рис.15

Поскольку $\angle 2 = \angle 3$ – вписанные, опираются на одну дугу в окружности ω, а $\angle 1 = \angle 4$ (аналогично), то $\Delta CWF \sim \Delta TWC$ (у них также есть общий $\angle 5$). Это подобие дает следующую пропорцию: $\dfrac{CW}{WF} = \dfrac{TW}{CW}$, откуда $WT \cdot WF = CW^2 = WI^2$ ($CW = IW$).

Но для окружности q по теореме о квадрате касательной $WT \cdot WF = WP^2$, то есть $WP = WI$. Так как точка P лежит на биссектрисе угла A, то $P \equiv I$.

Задача 14.

Точка Q – середина дуги BAC окружности ω, описанной около треугольника ABC. $QK \perp AC$ *(рис.16)*. Докажите, что описанная окружность треугольника AKB делит хорду AW пополам.

Доказательство.

По *теореме Архимеда* $CK = KA + AB$ *(покажите!)*. Продолжим CA за точку A на отрезок $AD = AB = c$. Тогда в равнобедренном ΔDAB $\angle 1 = \angle 2 = \dfrac{A}{2}$ (поскольку внешний $\angle BAC = A$). Очевидно, $\angle 3 = \angle 4 = \dfrac{A}{2}$. Так как $\angle 5 = \angle 6$ (вписанные, опираются на одну дугу в окружности ω), то $\Delta DCB \sim \Delta AWB$ – по двум углам. Пусть N – середина хорды AW. Значит, BK и BN – соответствующие медианы в подобных треугольниках DCB и AWB. Значит, $\angle DKB = \angle ANB$. А это и означает, что точки $A; K; N; B$ лежат на одной окружности.

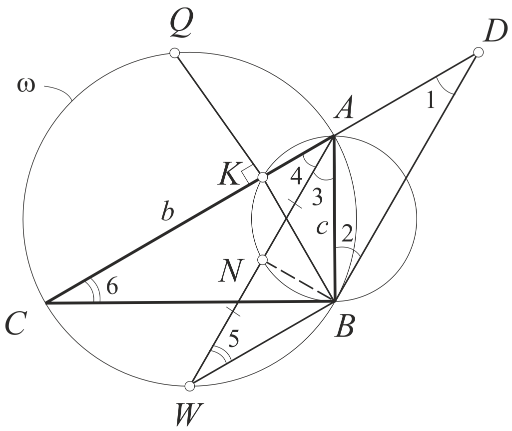

рис.16

Задача 15.

Докажите справедливость неравенства для треугольника ABC: $\boxed{a \ge 2l_a \cdot tg\dfrac{A}{2}}$, где $BC = a$, $AL = l_a$ – биссектриса угла A.

Доказательство.

Пусть Q – середина дуги BAC окружности ω, описанной около ΔABC. Тогда, очевидно, WQ – диаметр ω и WQ пересекает BC в точке M_1 – середине BC *(рис.17)*. Так как $\angle 2 = \angle 1 = \dfrac{A}{2}$ (вписанные, опираются на одну дугу в окружности ω), то из ΔQM_1C находим: $QM_1 = \dfrac{a}{2} \cdot ctg\dfrac{A}{2}$.

Поскольку QW – диаметр окружности ω, а AW – хорда, то $QW \ge AW$. С

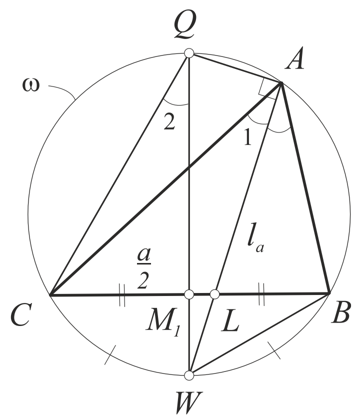

рис.17

учетом того, что $WM_1 \le WL$ (катет не превышает гипотенузу в ΔWM_1L) $WQ - WM_1 \ge AW - WL$ (в левой части неравенства от большего отрезка вычитаем меньший). Следовательно, $QM_1 \ge AL = l_a$. Но $QM_1 = \frac{a}{2} \cdot ctg\frac{A}{2}$. То есть, $\frac{a}{2}\text{ctg}\frac{A}{2} \ge l_a$, или $\boxed{a \ge 2l_a \cdot tg\frac{A}{2}}$.

Несколько задач, связанных с хордой *AW,* предложим для самостоятельного решения.

Задача 16. Описанная окружность треугольника *BLW* пересекает продолжение *AB* в точке *N*. Докажите, что $CN \perp AW$.

Задача 17. Докажите, что площадь четырехугольника *ABWC* можно вычислить по формуле $\boxed{S_{ABWC} = \frac{1}{2}AW^2 \cdot \sin A}$.

Задача 18. Серединные перпендикуляры к *AB* и *AC* пересекают хорду *AW* в точках *F* и *N* соответственно. Докажите, что *AF* = *NW*.

Задача 19. *AK* – проекция хорды *AW* на сторону *AC* треугольника *ABC*. Пусть *AL* – биссектриса в треугольнике *ABC* площади *S*. Докажите, что $\boxed{S_{AKL} = \frac{1}{2}S}$.

Задача 20. Сторона *BC* треугольника *ABC* делит хорду *AW* в отношении *k* ($\frac{AL}{LW} = k$). Найдите периметр треугольника *ABC*, если *BC* = *a*. Ответ. $a(\sqrt{k+1}+1)$.

Г.Филипповский