Угол 135° в задачах!

В предлагаемой подборке задач угол, равный 135°, играет важную роль. Он может либо оказать существенную помощь в решении той или иной задачи, либо просто стать ответом задачи. Некоторые из предложенных задач – учебные, они могут быть рассмотрены во время урока. Другие задачи – олимпидные – они для спецкурсов и математических соревнований.

Задача 1.

В треугольнике ABC с прямым углом C точка I – инцентр, точка пересечения биссектрис. Найдите величину угла AIB.

Решение.

Поскольку $A + B = 90^\circ$, то сумма их половинок ($\angle 1 + \angle 2$) равна 45° – *рис.1*.

Тогда $\boxed{\angle AIB = 180° - 45° = 135°}$.

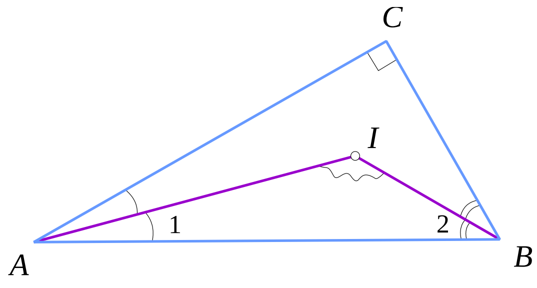

рис.1

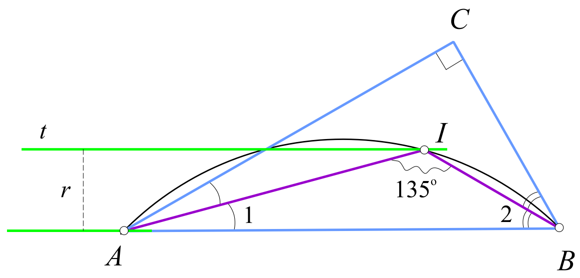

рис.2

Задача 2.

Постройте прямоугольный треугольник ABC ($C = 90^\circ$) по радиусам R и r описанной и вписанной окружностей этого треугольника.

Решение.

Очевидно, гипотенуза $AB = 2R$. На отрезке AB и на угле 135° строим сегмент. Прямая t, проведенная параллельно AB на расстоянии r от AB, пересекает сегмент в инцентре I (*рис.2*). Удвоим углы 1 и 2 и в пересечении получим вершину C.

Задача 3.

Восстановите прямоугольный треугольник ABC ($C = 90^\circ$) по основаниям его биссектрис – точкам L_1, L_2, L_3.

Решение.

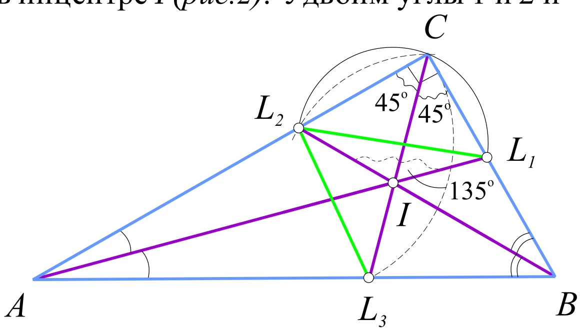

рис.3

Построим окружность на отрезке L_1L_2 как на диаметре. Сегмент, построенный на L_2L_3 и угле 45°, пересекается с этой окружностью в вершине C (*рис.3*). Сегмент на L_1L_2 и угле 135° в пересечении с CL_3 дает инцентр I. Прямые L_1I и CL_2 пересекаются в вершине A, а L_2I и CL_1 – в вершине B.

Задача 4.

В треугольнике ABC с тупым углом A отрезок AH (H – ортоцентр, точка пересечения высот) равен стороне BC. Найдите величину угла A.

Решение.

Так как ΔABC – тупоугольный, то ортоцентр H и центр описанной окружности O находятся вне треугольника. Известно, что $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ *(покажите!)*. Тогда ΔOM_1C – прямоугольный и равнобедренный ($OM_1 = \frac{1}{2}BC = CM_1$) – *рис.4*. Значит, $\angle COB = 2\angle COM_1 = 90°$,а $\angle COB$ (вне треугольника COB) равен $270°$. Следовательно, а $\angle BAC = 135°$ (вписанный, равен половине соответствующего центрального).

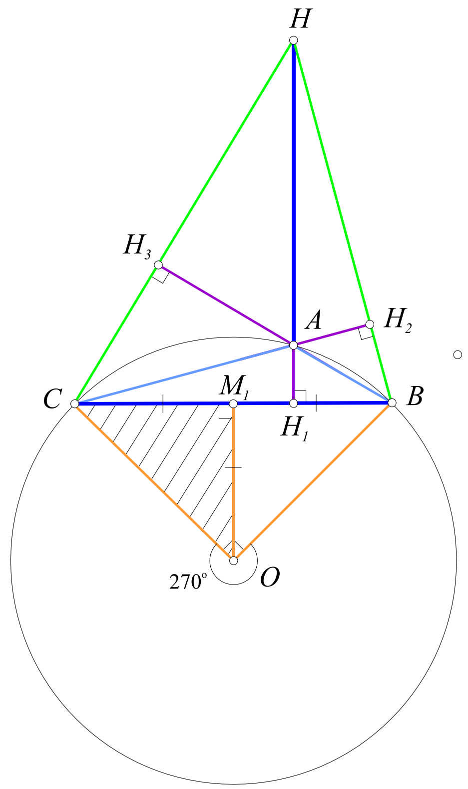

рис.4

<u>Замечание.</u> Не трудно также вывести формулу: $AH = BC \cdot |ctgA|$. Поскольку $AH = BC$, то $|ctgA| = 1$ и $ctgA = -1$ (угол A – тупой). Тогда $A = 135°$.

Задача 5.

Вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($C = 90°$) окружность касается BC, AC и AB в точках K_1, K_2, K_3 соответственно. Прямая K_1K_2 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Найдите величину угла PCQ.

Решение.

Очевидно, CK_1IK_2 – квадрат (I – инцентр) и K_2K_1 – серединный перпендикуляр к CI *(рис.5)*. Тогда $PI = PC$ и $P – I – B$ – одна прямая, то есть $\cup PA = \cup PC$. Аналогично $\cup CQ = \cup QB$. Поскольку AB – диаметр, то $\cup C - P - A + \cup C - Q - B = 180°$. Значит, $\cup PA + \cup QB = 90°$, а $\angle 1 + \angle 2 = 45°$ *(вписанные, равны половинам соответствующих дуг)*. Следовательно, $\boxed{\angle PCQ = 90° + 45° = 135°}$.

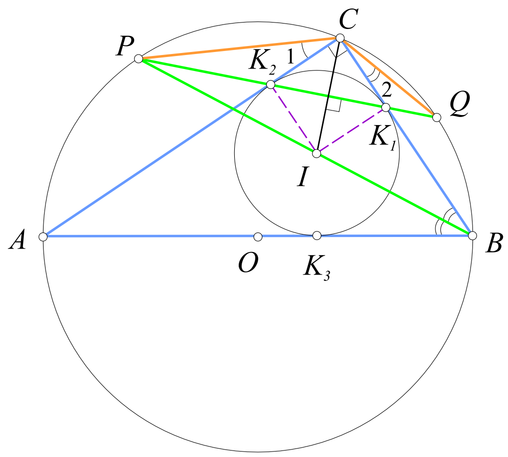

рис.5

Задача 6.

Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P такая, что $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$. Найдите величину угла APB.

Решение.

Осуществим поворот треугольника APB на $90°$ относительно точки B против часовой стрелки. Тогда точка A перейдет в C, P – в точку Q и ΔAPB – в ΔCQB *(рис.6)*. Так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle PBQ = 90°$ и $\angle 3 = \angle 4 = 45°$ ($PB = BQ$). Пусть $PA = x$, $PB = BQ = 2x$ и $PC = 3x$. Согласно теореме Пифагора $PQ = 2x\sqrt{2}$. Для ΔPQC получаем: $8x^2 + x^2 = 9x^2$, то есть, $\angle PQC = 90°$. Следовательно, $\boxed{\angle BQC = 90° + 45° = 135° = \angle APB}$.

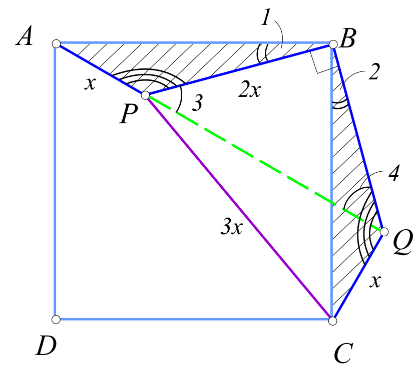

рис.6

Задача 7 *(Д.Швецов)*

На стороне AD квадрата $ABCD$ взята точка X. Окружность с центром I вписана в треугольник ABX. Она касается AX и BX в точках F и N соответственно. Докажите, что точки F, N, O (O – центр квадрата) лежат на одной прямой.

Доказательтво.

Проведем диагональ BD, тогда $\angle ADB = 45°$ *(рис.7)*. Очевидно, $\angle BIX = 135°$ *(задача 1)*. Тогда точки $B; I; X; D$ лежат на одной окружности ($135° + 45° = 180°$). Поскольку $IF \perp XD$, $IN \perp BX$ и $IO \perp BD$ (при этом $A - I - O - C$ – одна прямая), то $F - N - O$ – прямая Симсона точки I описанной окружности ΔBXD.

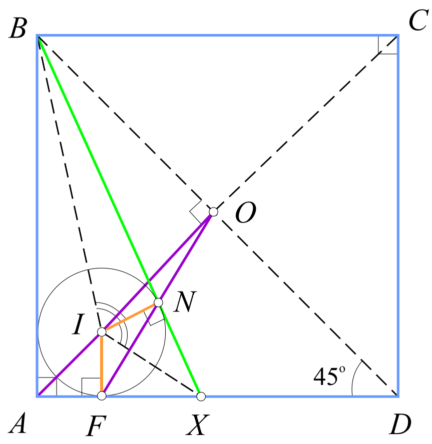

рис.7

Задача 8.

Найдите величину угла A в треугольнике ABC, если известно, что $BH_1 = 2AH_1$ и $CH_1 = 3AH_1$ (AH_1 – высота в треугольнике ABC).

Решение.

Пусть высота $AH_1 = h$. Тогда $BH_1 = 2h$ и $CH_1 = 3h$. Следовательно, $tgB = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$ и $tgC = \frac{h}{3h} = \frac{1}{3}$ *(рис.8)*. Согласно формуле $tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC$ *(докажите!)* для углов ΔABC получаем: $tgA + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = tgA \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, откуда $tgA = -1$ и $\boxed{A = 135^o}$.

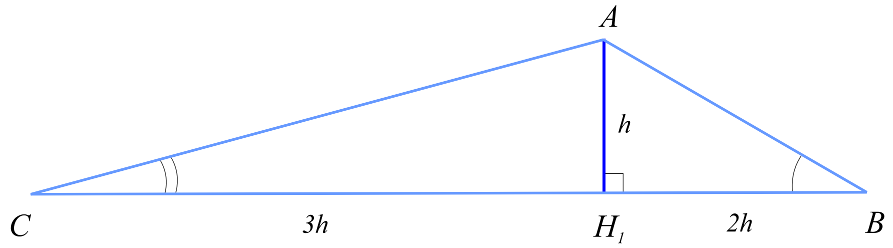

рис.8

Задача 9.

В прямоугольном треугольнике ABC ($C = 90^o$) точки $T_1; T_2; T_3$ – точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, AC и AB соответственно. Найдите величину угла $T_2T_3T_1$.

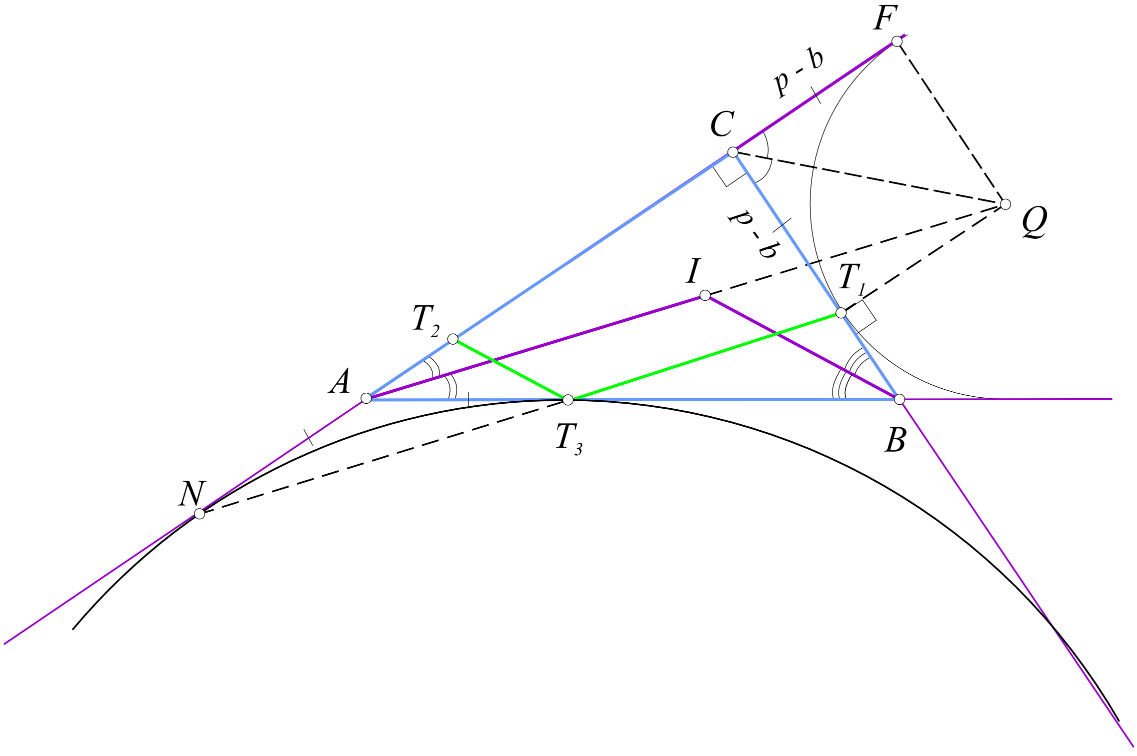

рис.9

Решение.

Пусть вневписанная окружность, касающаяся стороны BC в точке T_1, касается продолжения AC *(за точку C)* в точке F.

Известно, что $AF = p$ (полупериметру ΔABC) – *покажите!* Тогда, если $AC = b$, то $CF = CT_1 = p - b$.

Аналогично $AT_3 = AN = p - b$, где N – точка касания вневписанной окружности (касающейся гипотенузы AB) с продолжением катета CA (за точку A) – *рис.9*.

Построим квадрат $CFQT_1$. Тогда CQ – диагональ квадрата – является внешней биссектрисой $\angle ACB$. Следовательно, точки A, I, Q лежат на одной прямой (I – инцентр, а Q – центр одной из вневписанных окружностей). Так как отрезки AN и QT_1 параллельны и равны, то AQT_1N – параллелограмм и $T_1T_3 \parallel AI$. Аналогично покажем, что $T_2T_3 \parallel BI$. Значит, $\angle T_2T_3T_1 = \angle AIB$. А $\angle AIB = 135°$ *(задача 1)*.

Задача 10. *(IMO – 2013)*

В обозначениях *задачи 9* точка G – центр описанной окружности $\Delta T_2T_3T_1$. Докажите, что точка G лежит на описанной окружности треугольника ABC и, более того, точка G – середина дуги BCA этой окружности.

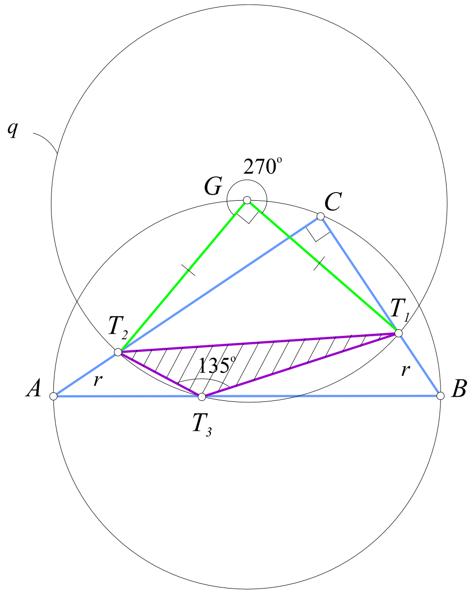

рис.10

Доказательство.

Пусть точка G – центр окружности q, описанной около $\Delta T_2T_3T_1$. Поскольку $\angle T_2T_3T_1 = 135°$ *(задача 9)*, то $\angle T_2GT_1$ *(внешний)* равен 270°. Тогда $\angle T_2GT_1 = 90°$ *(внутренний)* – *рис.10*. В таком случае точки T_2; G; C; T_1 лежат на одной окружности, а, согласно условию, все 5 точек: $G - T_2 - T_3 - T_1 - C$ принадлежат одной окружности.

Далее нетрудно показать, что

$AT_2 = BT_1 = p - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} = r$ *(покажите!)*.

Теперь воспользуемся «леммой о Воробьях»: если в ΔABC на сторонах AB и AC взяты точки D и E такие, что $BD = CE$, то точки D, A, P, E лежат на одной окружности (P- середина дуги BAC описанной окружности ω треугольника ABC) – *рис.11*. Действительно, $PB = PC$, P – середина дуги BAC, $BD = CE$ – по условию и $\angle 1 = \angle 2$ – вписанные, опираются на одну дугу. $\Delta PEC = \Delta PDB$ – по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle PEC = \angle PDB$, тогда равны и смежные с ними углы PEA и PDA, то есть, $D - A - P - E$ – одна окружность.

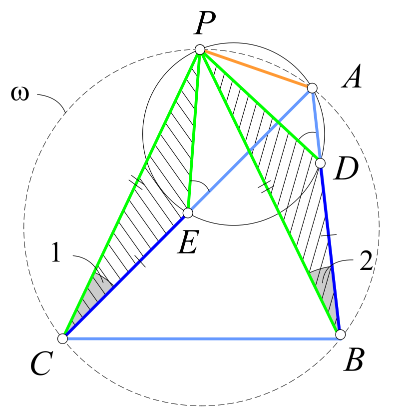

рис.11

Вернемся к нашей задаче. По «лемме о воробьях» точки $C - P - T_2 - T_1$ лежат на одной окружности. Это – та же окружность 5-ти точек. При этом $PT_2 = PT_1$. Стало быть, точки P и G совпадают. Что равносильно доказательству обоих пунктов задачи.

Несколько задач с углом 135° предложим для самостоятельного решения.

Задача 11. Постройте прямоугольный треугольник ABC $(C = 90°)$ по вершинам A, B и точке касания вписанной в треугольник ABC окружности с гипотенузой AB.

Задача 12. В прямоугольном треугольнике ABC $(C = 90°)$ на продолжении AB за точку A взята точка F такая, что $AF = AC$. Вновь на продолжении AB за точку B взята точка N такая, что $BN = BC$. Найдите величину угла FCN.

Задача 13. Треугольник ABC – прямоугольный и равнобедренный $(AC = BC)$. Точка K внутри треугольника такова, что $\angle KAC = \angle KCA = 15°$. Докажите, что $\angle AKB = 135°$.

Задача 14.

В прямоугольном треугольнике ABC $(C = 90^o)$ согласно *рис.12* $BN = BC$; $AF = AN$; $AP = AC$ и $PB = BT$. Точка Q – середина FT. Докажите, что $\angle AQB = 135°$.

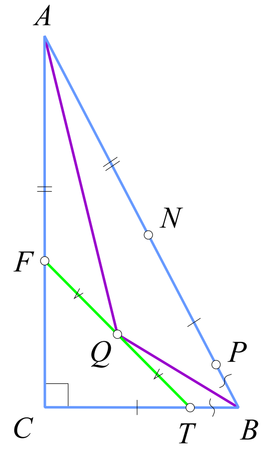

рис.12

Задача 15.

Дан остроугольный треугольник ABC, в котором O – центр описанной окружности, I – инцентр, H – ортоцентр. Докажите, что $\angle OIH > 135°$.

Г.Филипповский