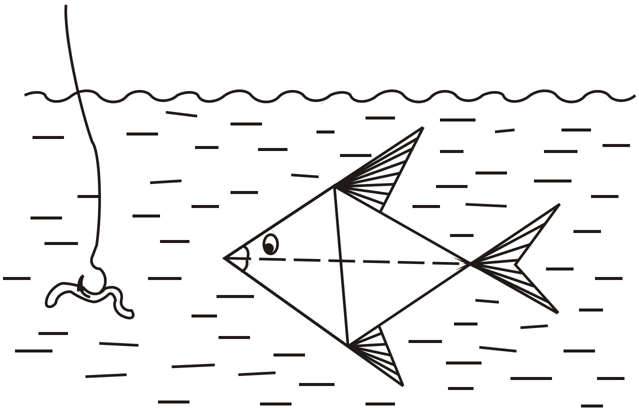
Лемма о трех биссектрисах

Мы поведем разговор о том замечательном факте геометрии треугольника, согласно которому две внешние биссектрисы и одна внутренняя (все проведены из разных вершин треугольника) пересекаются в одной точке. Назовем этот факт *леммой о трех биссектрисах* и докажем его.



Лемма.

Докажите, что в любом треугольнике две внешние биссектрисы и одна внутренняя, проведенные из разных вершин, пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Пусть внешние биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке Q. Докажем, что и внутренняя биссектриса угла A проходит (при продолжении) через точку Q. Проведем $QK \perp AC$, $QF \perp BC$ и $QN \perp AB$ *(рис.1)*. При этом $QK = QF$ – из равенства ΔQKC и ΔQFC (по гипотенузе и острому углу), а $QF = QN$ (по аналогичной причине равны ΔQFB и ΔQNB). Тогда $QK = QN$. Соединим A и Q. Треугольники AQK и AQN равны – по катету и гипотенузе, откуда следует, что $\angle 1 = \angle 2$, то есть AQ – внутренняя биссектриса угла BAC. Лемма доказана!

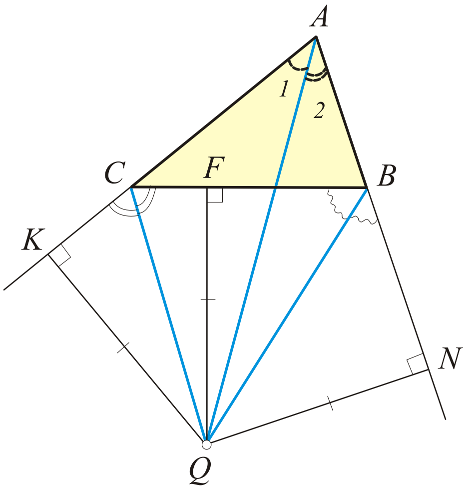


рис.1

Замечание. Точка Q, о которой идет речь в лемме, является центром вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Но свойства точки Q (которые важны сами по себе!) заслуживают отдельного разговора, находящегося за рамками данной статьи.

Мы же сейчас покажем эффектное и эффективное применение данной леммы – *леммы о трех биссектрисах* – при решении целого ряда задач, в том числе задач повышенной сложности и олимпиадных.

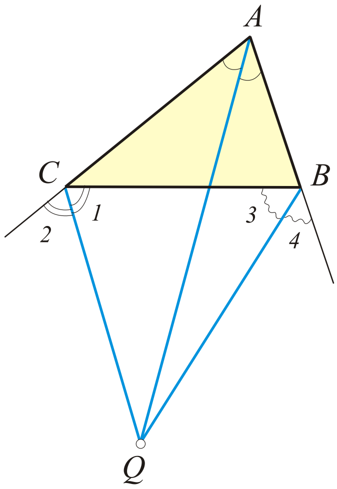


рис.2

Задача 1.

Точка I – инцентр (точка пересечения биссектрис) треугольника ABC. Луч AI пересекает внешнюю биссектрису угла B в точке Q. Найдите величину угла BQC, если известно, что $\angle BAC = \alpha$.

Решение.

Соединим *C* и *Q* *(рис.2)*. Согласно *лемме о трех биссектрисах CQ* – внешняя биссектриса угла *C* треугольника *ABC*. Значит, $\angle 1=\angle 2=\dfrac{180°-C}{2}=90°-\dfrac{C}{2}$. Аналогично $\angle 3=\angle 4=90°-\dfrac{B}{2}$. Тогда $\angle BQC=180°-(\angle 1+\angle 3)$. $\angle BQC=180°-(90°-\dfrac{C}{2}+90°-\dfrac{B}{2})=\dfrac{B+C}{2}=90°-\dfrac{A}{2}=90°-\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 2. *(А.Карлюченко)*

В выпуклом четырехугольнике *ABCD* биссектрисы углов *A* и *D* пересекаются в точке *N*, а биссектрисы углов *B* и *C* – в точке *T*. *F* – точка пересечения продолжений *AB* и *DC* *(рис.3)*. Докажите, что точки *F; N; T* лежат на одной прямой.

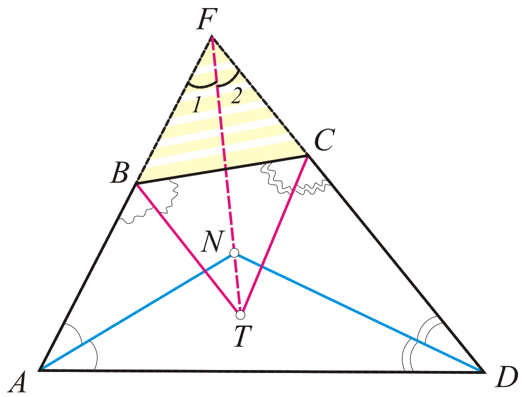


рис.3

Доказательство.

В треугольнике *AFD* точка *N* – инцентр, поэтому *FN* – третья биссектриса в этом треугольнике. Значит, $\angle 1=\angle 2$. Для треугольника *BFC* лучи *BT* и *CT* совпадают с внешними биссектрисами углов *B* и *C*. Тогда *FT* – внутренняя биссектриса в ΔBFC – по *лемме о трех биссектрисах*. В таком случае точки *F, N, T* принадлежат одной прямой.

Задача 3.

В выпуклом четырехугольнике *ABCD* биссектрисы углов *B* и *C* пересекаются в точке *N* – середине *AD*. Докажите, что углы при вершинах *A* и *D* равны.

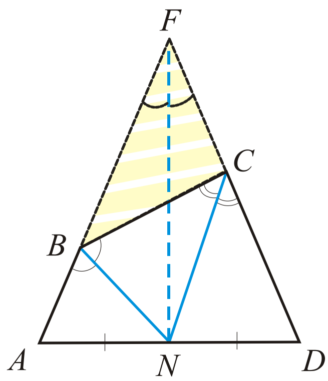


рис.4

Доказательство.

Продолжим *AB* и *DC* до пересечения в точке *F* *(рис.4)*. Так как *BN* и *CN* – внешние биссектрисы в треугольнике *BCF*, то по *лемме о трех биссектрисах FN* совпадает с внутренней биссектрисой угла *BFC*. Но *FN* – также и медиана в ΔAFD. Следовательно, ΔAFD – равнобедренный и $\angle FAD=\angle FDA$, что и требовалось доказать!

Задача 4.

CL – биссектриса в треугольнике *ABC*. На стороне *BC* взята точка *N* такая, что угол *NAB* равен сумме углов при вершинах *B* и *C* треугольника *ABC*, т.е. $\angle NAB=B+C$. Докажите, что *NL* – биссектриса угла *ANB*.

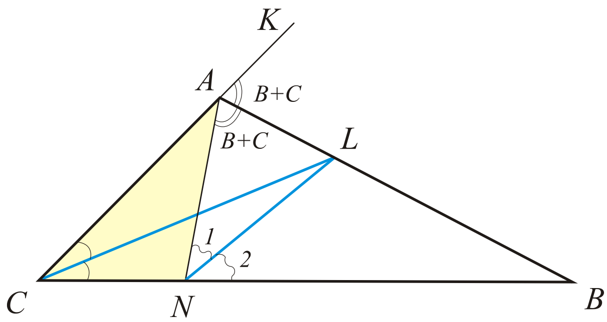


рис.5

Доказательство.

Проведем луч $C-A-K$ *(рис.5)* и заметим, что $\angle BAK=180°-A=B+C$. Тогда *AB* – внешняя биссектриса в ΔCAN. Поскольку *CL* совпадает с внутренней биссектрисой ΔCAN, то *NL* – вторая внешняя биссектриса этого треугольника (согласно *лемме*). Значит, $\angle 1=\angle 2$ и *NL* – биссектриса угла *ANB*.

Задача 5.

AH и CL – соответственно высота и биссектриса в треугольнике ABC, причем $\angle CLA = 45°$. Определите величину угла LHB.

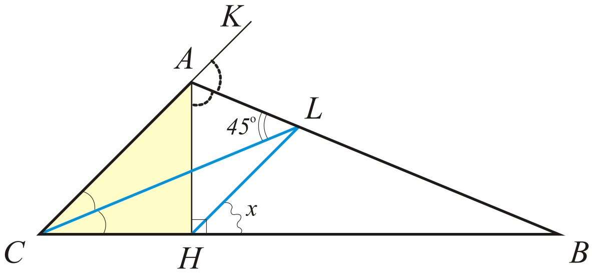


рис.6

Решение.

Для ΔBLC угол $CLA = 45°$ является внешним. Поэтому $B + \dfrac{C}{2} = 45°$ (он равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним) – *рис.6*. Или $2B + C = 90°$, или $90° - B = B + C$. Но $\angle HAB = 90° - B$ (из ΔAHB). Следовательно, $\angle HAB = B + C$. Проведем луч $C - A - K$. Тогда $\angle KAB = 180° - A = B + C$ и AB – внешняя биссектриса в ΔAHC. CL – внутренняя биссектриса в этом треугольнике. С учетом *леммы о трех биссектрисах HL* – вторая внешняя биссектриса в ΔAHC. Значит, $\angle LHB = \angle LHA = 45°$.

Задача 6.

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle DBC = 60°$, $\angle ADB = 40°$ и $\angle BDC = 70°$. Найдите величину угла φ между диагоналями AC и BD *(рис.7)*.

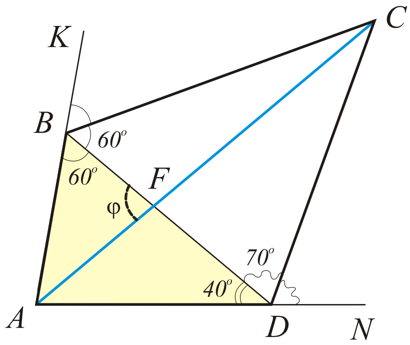


рис.7

Решение.

Очевидно, $\angle BAD = 80°$ (из ΔABD). Проведем лучи $A - B - K$ и $A - D - N$. Тогда $\angle KBC = 60°$ и $\angle CDN = 70°$. Значит, BC и DC – внешние биссектрисы в ΔABD. Согласно *лемме* AC – внутренняя биссектриса в этом треугольнике, то есть

$\angle BAC = \angle DAC = \dfrac{80°}{2} = 40°$. Следовательно, $\varphi = 40° + 40° = 80°$ – внешний угол для ΔAFD.

Задача 7.

Точки F и N соответственно на сторонах AD и CD квадрата такие, что $\angle ABF = 15°$, $\angle DFN = 30°$ *(рис.8)*. Найдите величину угла $FBN = x$.

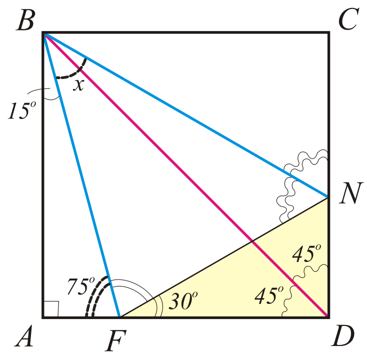


рис.8

Решение.

Очевидно, $\angle AFB = 75°$ – Из ΔABF. Тогда $\angle BFN = 180° - 75° - 30° = 75°$. Проведем диагональ BD. В треугольнике DFN луч DB совпадает с внутренней биссектрисой угла D, луч FB – с внешней биссектрисой угла F. Значит, NB – вторая внешняя биссектриса в ΔDFN (согласно *лемме*). Поскольку $\angle FND = 60°$ (из ΔFND), то $\angle FNC = 120°$ и тогда $\angle BNF = \angle BNC = \dfrac{120°}{2} = 60°$.

Следовательно, в ΔFBN $x = 180° - 75° - 60° = 45°$.

Задача 8. *(И.Ф.Шарыгин)*

В треугольнике ABC с углом при вершине A, равным 120^o; проведены биссектрисы AL, BN и CP. Найдите величину угла NLP.

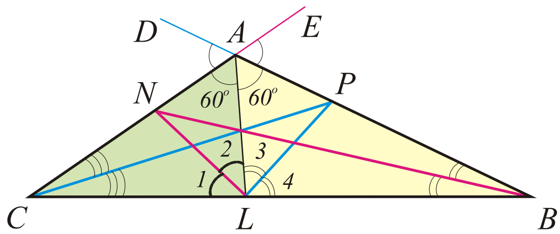


рис.9

Решение.

Продолжим BA и CA за точку A. Тогда $\angle DAC = \angle EAB = 60°$ *(рис.9)*. Для ΔABL луч BN совпадает с внутренней биссектрисой угла B, AC – с внешней биссектрисой угла A. Значит, LN – вторая внешняя биссектриса (при вершине L), следовательно $\angle 1 = \angle 2$. В ΔACL луч CP совпадает с внутренней биссектрисой, AP – с внешней. Тогда LP – еще одна внешняя биссектриса в ΔACL, то есть $\angle 3 = \angle 4$. Поскольку угол между биссектрисами смежных углов прямой, то $\angle NLP = 90°$.

Задача 9.

CP – биссектриса в треугольнике ABC. Точка K на стороне BC такая, что $\angle AKB = A - B$. Постройте треугольник ABC по вершине A, а также точкам K и P.

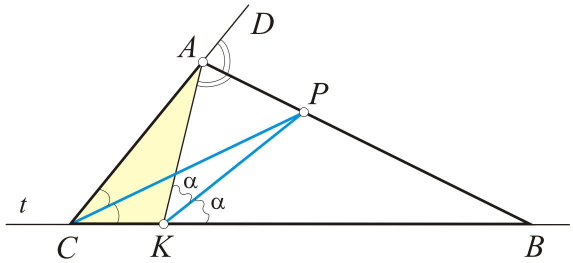


рис.10

Решение.

Анализ показывает, что так как $\angle AKB = A - B$, то в треугольнике AKB найдем величину $\angle KAB$. Он равен $180° - (A - B) - B = 180° - A$. Продолжим CA за вершину A. Тогда $\angle DAB = 180° - A$ *(рис.10)*. Для ΔACK отрезок CP – внутренняя биссектриса, AB – внешняя. Значит, по *лемме о трех биссектрисах*, KP – вторая внешняя биссектриса. Отсюда построение: соединяем точки $A; K; P$. Пусть $\angle AKP = \alpha$. Через точку K под углом α к KP проводим прямую t, которая пересекает луч AP в вершине B. У нас есть $\angle KAB = 180° - A$. Тогда есть и угол A. Через вершину A под углом, равным A, к стороне AB проводим луч. Он пересекает прямую t в недостающей вершине C.

Задача 10. *(Льюис Кэррол)*

На сторонах AC и AB треугольника ABC построить соответственно точки F и N такие, чтобы отрезок FN был параллелен стороне BC и при этом выполнялось равенство: $BN + CF = BC$.

Решение.

Пусть такие точки F и N построены и пусть также $FN \parallel BC$: $x + y = a$ *(рис.11)*. Анализ показывает, что если найти на BC такую точку T, что $CT = y$, то $BT = x$. Поскольку ΔCFT равнобедренный ($CF = CT = y$), то $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 2 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие при параллельных прямых FN и BC). Аналогично $\angle 4 = \angle 5$ ($BN = BT = x$) и $\angle 5 = \angle 6$ ($FN \parallel BC$). Тогда FT и NT – две внешние биссектрисы в ΔAFN. Согласно *лемме* AT совпадает с внутренней биссектрисой угла A в треугольнике AFN. Следовательно, проводим биссектрису AT в ΔABC. На стороне CA откладываем $CF = CT$. А на стороне BA – отрезок $BN = BT$. Соединяем F и N. Отрезок FN – искомый.

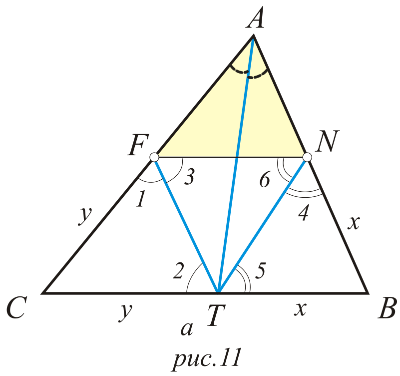


рис.11

Задача 11.

В треугольнике ABC величины углов при вершинах A и B соответственно равны $112{,}5°$ и $22{,}5°$. Докажите, что в этом треугольнике высота AH, медиана BM и биссектриса CP пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Пусть высота AH и биссектриса CP пересекаются в точке Q *(рис.12)*. Покажем, что и медиана BM проходит через Q. $\angle HAB = 90° - 22{,}5° = 67{,}5°$ (из ΔAHB).

Продолжим CA за точку A. Тогда $\angle DAB = 180° - 112{,}5° = 67{,}5°$. В ΔAHC отрезок CP совпадает с внутренней биссектрисой, AB – с внешней.

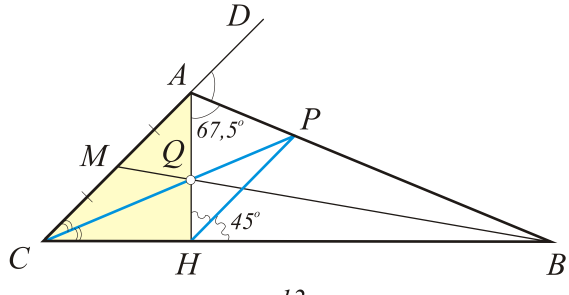


рис.12

Значит, по *лемме о трех биссектрисах*, HP – вторая внешняя биссектриса и $\angle AHP = \angle BHP = 45°$. Но и $\angle ACB = 45°$ ($180° - 112,5° - 22,5°$). Следовательно, $APHC$ – трапеция. По так называемой *лемме о трапеции* (точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой) луч BQ проходит через середину AC – точку M. А это и означает, что высота AH, медиана BM и биссектриса CP пересекаются в одной точке – точке Q.

Задача 12. *(Д.Швецов)*

Биссектрисы AL и BK прямоугольного треугольника ABC *(* $C = 90°$ *)* пересекаются в точке I. Q – центр описанной окружности треугольника CKL. Докажите, что $QI \perp AB$.

Доказательство.

Так как ΔKCL – прямоугольный, то точка Q – середина KL. Проведем $KN \perp AB$ и $LT \perp AB$ *(рис.13)*. Очевидно, $CK = KN$ и $CL = LT$ (любая точка биссектрисы равноудалена от сторон). Тогда $\Delta CKB = \Delta NKB$ (по катету и гипотенузе) и $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично $\Delta ACL = \Delta ATL$ и $\angle 3 = \angle 4$. Для ΔAKN отрезки AI и KB – соответственно внутренняя и внешняя биссектрисы. Значит, NI – вторая нешняя биссектриса и $\angle 5 = \angle 6 = 45°$. Для ΔBLT отрезки BI и LA – также соответственно внутренняя и внешняя биссектрисы. Тогда TI – вторая внешняя *(по лемме)* и $\angle 7 = \angle 8 = 45°$. Следовательно, серединный перпендикуляр к NT проходит через точку I. По теореме Фалеса этот серединный перпендикуляр проходит и через середину KL – точку Q. Значит, $QI \perp AB$.

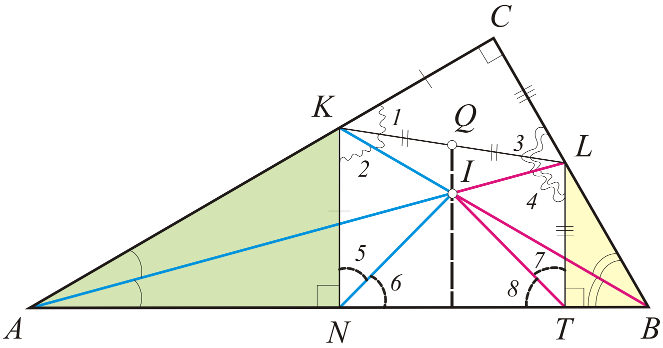


рис.13

Несколько задач, в которых успешно применяется *лемма о трех биссектрисах*, предложим решить самостоятельно.

Задача 13. *(Евклид)* Постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна.

Задача 14. Внутренняя биссектриса угла A пересекает внешнюю биссектрису угла B в точке T, а внутреннюю биссектрису угла C – в точке I. Докажите, что около четырехугольника $BICT$ можно описать окружность.

Задача 15. *(Г.Филипповский)* На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC взяты соответственно точки N и F такие, что $\angle FNT = \angle BNT$, где T – середина BC. Найдите расстояние от точки T до FN, если высота CK в треугольнике ABC равна h.

Задача 16. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH, BN и CK. Докажите, что вершина A – точка пересечения двух внешних и одной внутренней биссектрис треугольника NKH.

Задача 17. CP – биссектриса в равнобедренном ΔABC ($B = C = 36°$). $D \in BC$ такая, что $AD = n$ и треугольники ADC и ABD – равнобедренные. Найти длину отрезка DP.

Задача 18. На продолжениях сторон AC и AB треугольника ABC постройте точки F и N соответственно такие, что $FN \parallel BC$ и $FN = CF + BN$.

Задача 19. Биссектрисы углов трапеции $ABCD$ образуют четырехугольник $KNTQ$ с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что $ABCD$ – равнобокая трапеция.

Задача 20. Дан треугольник ABC с указанным инцентром I. Пользуясь только линейкой, постройте точку пересечения внешних биссектрис углов A и B и внутренней биссектрисы угла C.

Г.Филипповский

Русановский лицей, г.Киев