О луче *AO* и его роли в задачах геометрических Олимпиад

Пусть точка *O* – центр окружности, описанной около *остроугольного* треугольника *ABC*. Мы поведем наш разговор о луче *AO* и его активном участии в разнообразных геометрических задачах. Но, прежде чем перейти к задачам, напомним две важные леммы геометрии треугольника, которые связаны с лучом *AO*.

Лемма 1.

Пусть BH_2 и CH_3 – высоты в треугольнике *ABC*. Докажите, что луч *AO* перпендикулярен прямой H_2H_3.

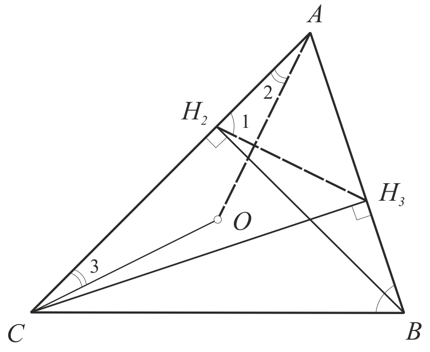

рис.1

Доказательство.

Около четырехугольника BH_3H_2C можно описать окружность с диаметром *BC* ($\angle BH_3C = \angle BH_2C = 90°$). Тогда $\angle 1 = B$ *(рис.1)*. Так как $\angle AOC = 2B$ *(центральный)*, то $\angle 2 = \angle 3 = \dfrac{180° - 2B}{2} = 90° - B$.

Поскольку $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, то $AO \perp H_2H_3$.

Лемма 2.

В треугольнике *ABC* точка *H* – ортоцентр (точка пересечения высот), а M_1 – середина стороны *BC*. Отрезок HM_1 удвоен за точку M_1 – получили точку *D*. Докажите, что луч *AO* проходит через *D*.

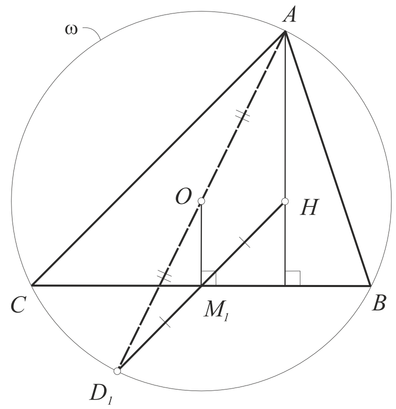

рис.2

Доказательство.

Проведем диаметр AD_1 в окружности *ω*, описанной около ΔABC, и соединим точки *O* и M_1 *(рис.2)*. Так как $OM_1 = \dfrac{1}{2}AH$ *(покажите!)*, то OM_1 – средняя линия в треугольнике AHD_1, то есть $HM_1 = M_1D_1$. В таком случае точки D_1 и *D* совпадают.

<u>Замечание.</u> *Лемму 2* часто фомулируют так: точки, симметричные ортоцентру относительно середин сторон треугольника, лежат на его описанной окружности. Более того, они диаметрально противоположны вершинам треугольника (в нашем случае *AD* – диаметр).

Отметим, что *лемма 1* и *лемма 2* сами по себе помогают в решении многих геометрических задач и, безусловно, каждая из них заслуживает отдельного разговора.

Но в контексте данной статьи мы остановимся на иных свойствах луча *AO*. Быть может, менее знаменитых, но также достаточно полезных и важных.

Задача 1.

В треугольнике *ABC* (*AC* > *AB*) провели биссектрису AL_1 и на стороне *AC* отложили отрезок *AF* = *AB*. Докажите, что $AO \perp FL_1$.

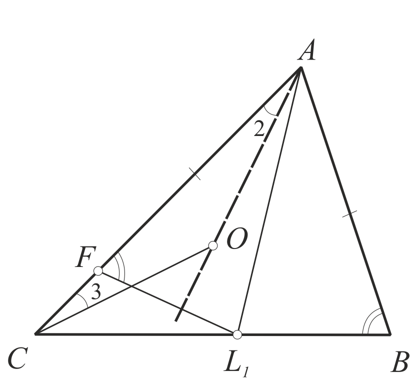

рис.3

Доказательство.

Очевидно, $\Delta AFL_1 = \Delta ABL_1$ – по двум сторонам и углу $\dfrac{A}{2}$ между ними. Следовательно, $\angle AFL_1 = B$ *(рис.3)*. Так как $\angle 2 = \angle 3 = 90° - B$, то $AO \perp FL_1$.

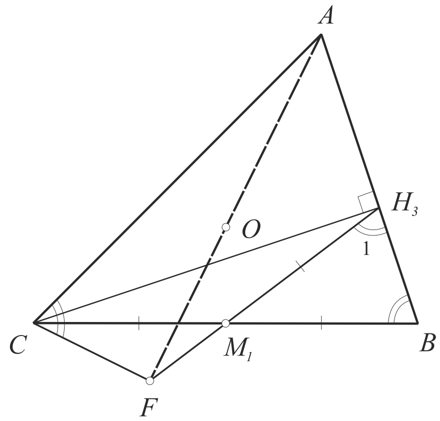

рис.4

Задача 2.

В треугольнике *ABC (b > c) CH₃* – высота, а M_1 – середина *BC*. Через точку *C* под углом *B* к стороне *AC* проведен луч. Он пересекает прямую H_3M_1 в точке *F*. Докажите, что луч *AO* проходит через *F*.

Доказательство.

H_3M_1 –медиана, проведенная к гипотенузе в ΔBH_3C. Поэтому $H_3M_1 = BM_1$ и $\angle 1 = B$. Поскольку $\angle 1 = \angle ACF$, то точки *A, C, F,* H_3 лежат на одной окружности. При этом *AC* – ее диаметр ($\angle AH_3C = 90°$). Тогда $\angle CFA = 90°$ – вписанный, опирается на диаметр в этой окружности.

Так как $\angle ACF = B$, то $\angle CAF = 90° - B$. Но и $\angle CAO = 90° - B$, как было показано в *лемме 1*. Значит, точки *A, O, F* принадлежат одной прямой.

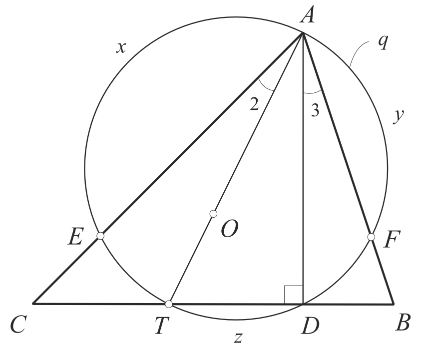

рис.5

Задача 3. *(О.Карлюченко)*

Луч *AO* пересекает сторону *BC* треугольника *ABC* в точке *T*. На отрезке *AT* как на диаметре построена окружность *q*, которая пересекает *BC, AC* и *AB* соответственно в точках *D, E, F*. Пусть $\cup AE = x$; $\cup AF = y$ и $\cup DT = z$. Докажите, что *x = y + z (рис.5)*.

Доказательство.

Как уже было показано, $\angle 2 = 90° - B$. Соединим *A* и *D*. $\angle ADT = 90°$ – вписанный, опирается на диаметр в окружности *q*. Тогда в ΔADB угол $BAD = 90° - B$. Поскольку $\angle 2 = \angle 3$, то $\cup ET = \cup FD$. Но *AT* – диаметр окружности *q*. Следовательно, $\cup AE = \cup AF + \cup DT$, или *x = y + z,* что и требовалось доказать!

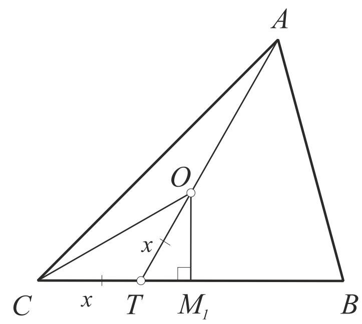

рис.6

Задача 4.

Луч *AO* пересекает *BC* в точке *T*. Найдите углы треугольника *ABC*, если $OT = CT = \frac{1}{2} BT$.

Решение.

Пусть *OT = CT = x* и *BT = 2x*. Проведем серединный перпендикуляр OM_1. Тогда $CM_1 = BM_1 = 1{,}5x$ и $TM_1 = \frac{x}{2}$.

Катет TM_1 равен половине гипотенузы *OT*, а значит, $\angle TOM_1 = 30°$ и $\angle OTM_1 = 60°$. Но $\angle OTM_1$ – внешний для ΔOTC. Тогда $\angle COT = \angle OCT = 30°$. В таком случае, $\angle AOC = 2B = 180° - 30° = 150°$, откуда $B = 75°$. $\angle COM_1 = \angle BOM_1 = A = 30° + 30° = 60°$, то есть, $A = 60°$. Значит, $C = 180° - 75° - 60° = 45°$.

Задача 5.

В треугольнике ABC луч CN проведен так, что $\angle 1 = C$, а луч BK так, что $\angle 2 = B$ *(рис.7)*. NC и KB пересекаются в точке F. Докажите, что луч AO проходит через F.

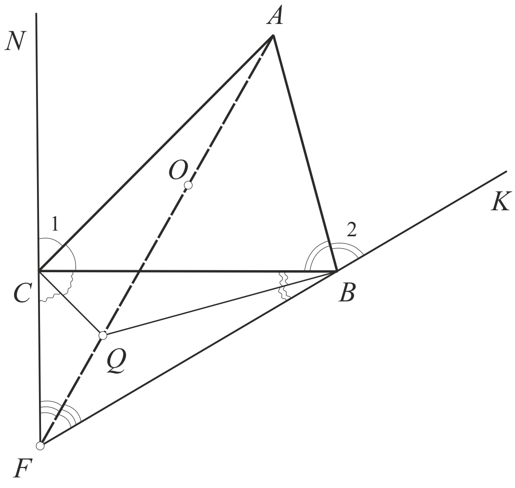

рис.7

Доказательство.

BA и CA – внешние биссектрисы в треугольнике BFC. Тогда вершина A – центр вневписанной окружности ΔBFC, а FA – внутренняя биссектриса в этом треугольнике.

Пусть точка Q – инцентр в ΔBFC. Значит, BQ – биссектриса $\angle FBC$ и CQ – биссектриса $\angle FCB$. $\angle ABQ = \angle ACQ = 90°$ (как углы между биссектрисами смежных углов). Около четырехугольника $ABQC$ можно описать окружность (два противоположных угла равны по 90º). Очевидно, точка O – середина AQ – ее центр ($AO = OB = OC$). В таком случае A – O – Q – F – одна прямая.

Задача 6.

Точки D и F соответственно на сторонах AC и AB треугольника ABC такие, что $DF||BC$. Перпендикуляр к AC в точке D и перпендикуляр к AB в точке F пересекаются в точке P. Докажите, что луч AO проходит через P.

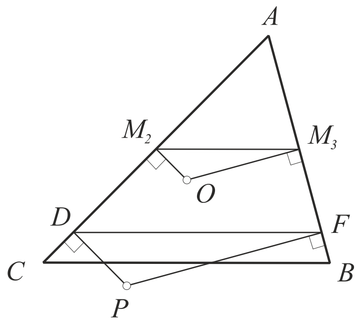

рис.8

Доказательство.

Пусть M_2 – середина AC и M_3 – середина AB. Тогда OM_2 и OM_3 – серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB соответственно *(рис.8)*. Поскольку четрыехугольники AM_2OM_3 и $ADPF$ гомотетичны с центром гомотетии A, а O и P – соответственные точки при этой гомотетии, то, очевидно, точки A, O, P лежат на одной прямой.

Задача 7.

Точка B_1 симметрична вершине B относительно стороны AC треугольника ABC и окружность s описана около ΔABB_1. Точка C_1 симметрична вершине C относительно стороны AB и окружность q описана около ΔACC_1. Окружности s и q вторично пересекаются в точке P. Докажите, что луч AO проходит через P.

Доказательство.

Пусть серединные перпендикуляры к AB и BB_1 пересекаются в точке T (T лежит на прямой AC) и T – центр окружности s. Пусть также серединные перпендикуляры к AC и CC_1 пересекаются в точке G (G принадлежит прямой AB) и G – центр окружности q *(рис.9)*. В таком случае O – пересечение серединных перпендикуляров к AB и AC – ортоцентр в ΔATG. Значит, $AO \perp TG$. Но и $AP \perp TG$ (общая хорда перпендикулярна линии центров). Следовательно, A – O – P – одна прямая.

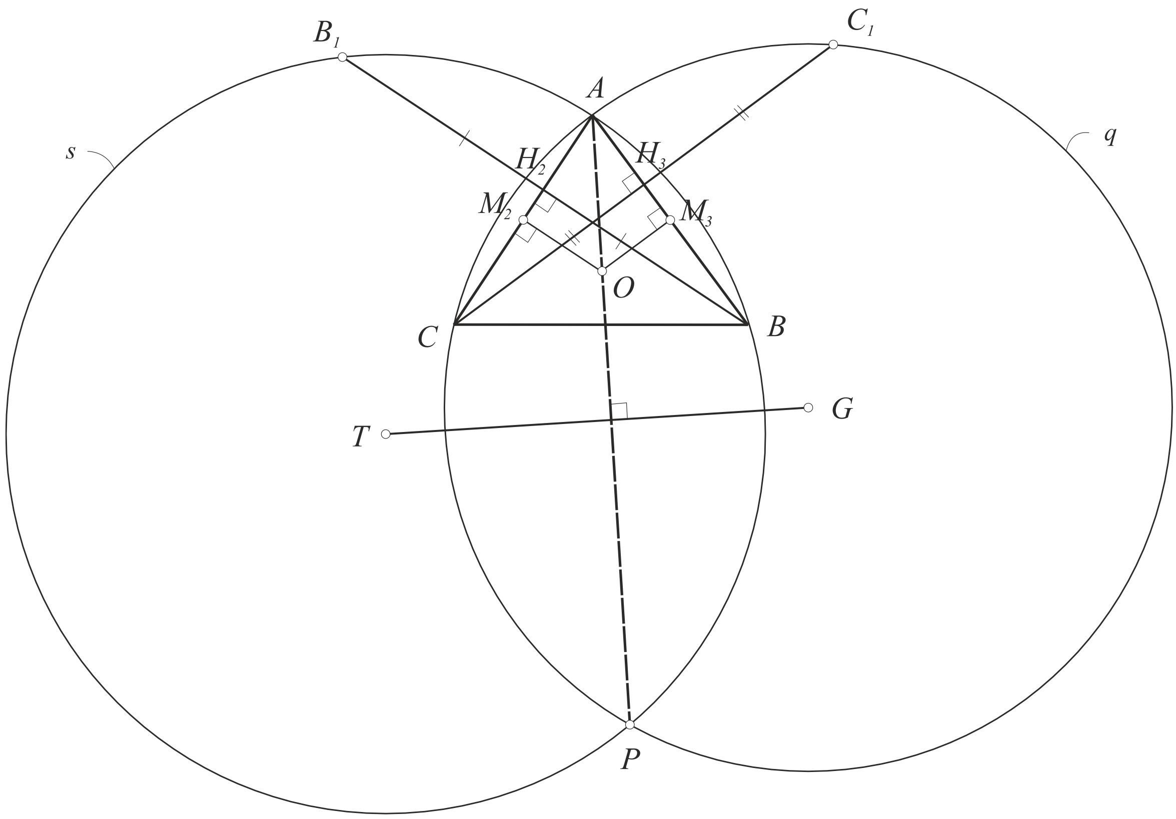

рис.9

Задача 8.

Из M_1 – середины BC – проведены перпендикуляры M_1D и M_1F к сторонам AC и AB соответственно. Точка N – середина DF. Докажите, что луч AO параллелен прямой M_1N.

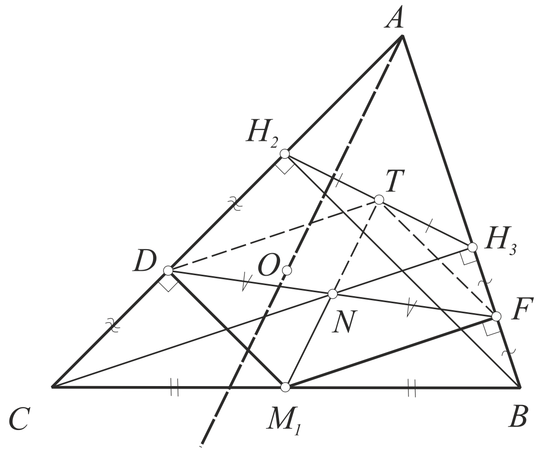

рис.10

Доказательство.

Проведем высоты BH_2 и CH_3. Очевидно, D – середина CH_2 и F – середина BH_3 (согласно *теореме Фалеса)*. Пусть T – середина H_2H_3 и $DTFM_1$ – параллелограмм Вариньона для четырехугольника BH_3H_2C *(рис.10)*. Значит, $T – N – M_1$ – одна прямая. Поскольку $H_2M_1 = H_3M_1 = \frac{1}{2}BC$ (медианы , проведенные к гипотенузе в треугольниках BH_2C и BH_3C), то $M_1T \perp H_2H_3$. Так как и $AO \perp H_2H_3$ *(лемма 1)*, то луч AO параллелен прямой $T – N – M_1$.

Задача 9.

BH_2 и CH_3 – высоты в треугольнике ABC. На стороне AC взята точка P так, что $AP = CH_2$. На стороне AC взята точка P так, что $AP = CH_2$. На стороне AB точка Q такова, что $AQ = BH_3$. Докажите, что луч AO делит PQ пополам.

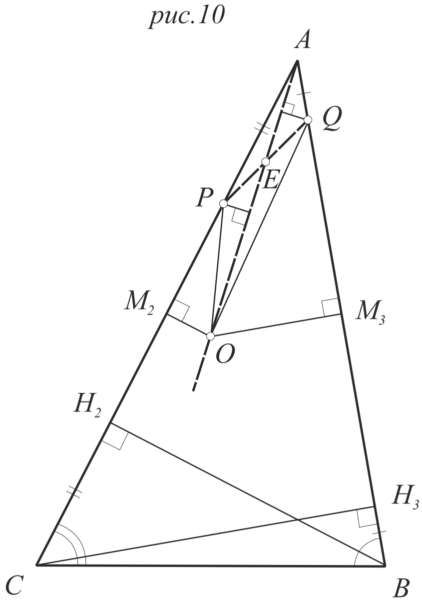

рис.11

Доказательство.

Пусть AO пересекает PQ в точке E. Покажем, что треугольники APO и AQO равновелики: у них общее основание AO, тогда будут равны высоты, проведенные из вершин P и Q. А это и будет означать, что $PE = EP$. Проведем серединные перпендикуляры OM_2 и OM_3 *(рис.11)*.

Так как $\angle AOM_2 = B$ ($\angle AOC = 2B$ – центральный), то $OM_2 = AO \cdot \cos B = R\cos B$. $CH_2 = BC \cdot \cos C$ – из ΔBH_2C и $AP = CH_2 = BC \cdot \cos C$. Если взять отрезок AP за основание ΔAPO, то

$$S_{APO} = \frac{1}{2} AP \cdot OM_2 = \frac{1}{2} BC \cdot \cos C \cdot R\cos B \ (1).$$

Из ΔAOM_3 находим: $OM_3 = R \cdot \cos C$. А из ΔBH_3C: $BH_3 = BC \cdot \cos B = AQ$. Тогда найдем площадь ΔAQO, приняв за основание отрезок AQ.

$$S_{AQO} = \frac{1}{2} AQ \cdot OM_3 = \frac{1}{2} BC \cdot \cos B \cdot R\cos C \ (2)$$

Сравнение *(1)* и *(2)* дает равновеликость треугольников *APO* и *AQO*, что завершает доказательство.

Задача 10.

AH_1; BH_2; CH_3 – высоты в треугольнике *ABC*. Окружность *t* с центром *A* радиуса AH_1 пересекает прямую H_2H_3 в точках *D* и *F*. Лучи *BF* и *DC* пересекаются в точке *T*. Докажите, что *A – O – T* – одна прямая.

Доказательство.

Треугольники AH_2H_3 и *ABC* подобны с коэффициентом подобия, равным $\cos A$ *(покажите!)*. Проведем высоту *AQ* в ΔAH_2H_3 *(рис.12)*. При этом *A – Q – O* – одна прямая, так как $AO \perp H_2H_3$. С учетом подобия $\dfrac{AQ}{AH_1} = \cos A$. Но $AD = AH_1 = R_t$, значит, $\dfrac{AQ}{AD} = \cos A$ и $\angle DAQ = A$.

Как мы уже не раз показали, $\angle CAO = \angle ACO = 90° - B$. Тогда $\angle DAC = A - (90° - B) = A + B - 90° = 90° - C$. Поскольку $\angle CAH_1 = 90° - C$ (из ΔCAH_1), то $\Delta ADC = \Delta AH_1C$ – по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle ADC = \angle AH_1C = 90°$, то есть, *CD* – касательная к окружности *t*. Аналогично покажем, что и *BF* – касательная к *t*. Следовательно, касательные *TD* и *TF* – равны. Теперь очевидно, что *A – Q – O – T* – одна прямая.

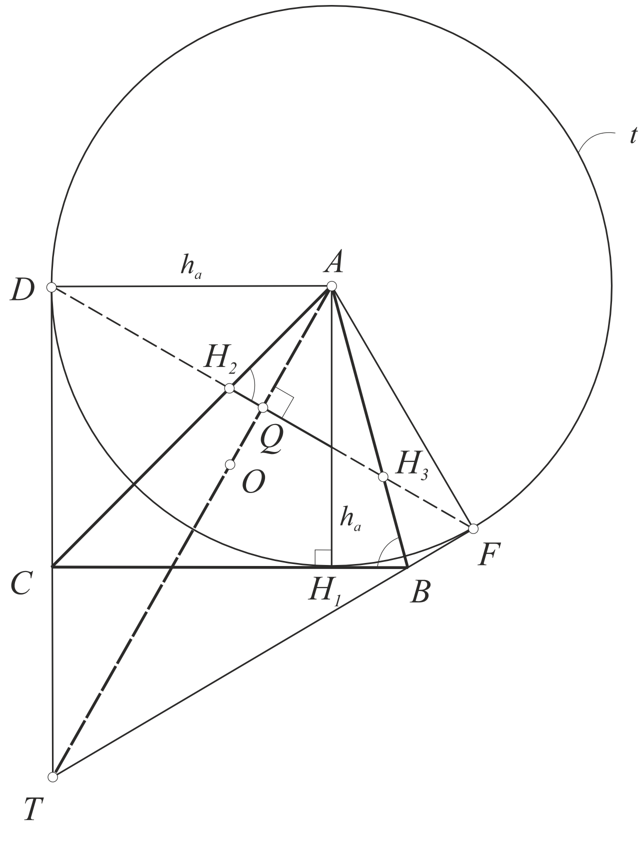

рис.12

Еще несколько задач, связанных с лучом *AO*, предложим решить самостоятельно.

Задача 11. Прямая H_2H_3 (BH_2 и CH_3 – высоты в треугольнике *ABC*) пересекает описанную около него окружность *ω* в точках *D* и *F*. Касательные к *ω* в точках *D* и *F* пересекаются в точке *T*. Докажите, что лучи *TO* и *AO* совпадают.

Задача 12. *AL* – биссектриса в треугольнике *ABC*. Окружность *q* описана около треугольника *ABL*. Перпендикуляр из вершины *B* к *AL* пересекает *q* в точке *P*. Докажите, что луч *AO* проходит через *P*.

Задача 13. Луч AO пересекает сторону BC в точке T. Докажите, что $\frac{AO}{OT} = \frac{|\cos(B-C)|}{\cos A}$.

Задача 14. AH_1 – высота в треугольнике ABC. На стороне BA отложим отрезок $BF = BH_1$. На стороне CA отложим отрезок $CD = CH_1$. Докажите, что луч AO и серединный перпендикуляр к DF пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

Задача 15. На AO как на хорде построена окружность t. Она пересекает стороны AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника POQ лежит на стороне BC.

Задача 16. CH_3 – высота в треугольнике ABC, M_1 – середина BC. Луч AO пересекается с прямой H_3M_1 в точке F. Найдите величину угла AFC. (Ответ. 90^o)

Задача 17. В треугольник ABC вписана окружность s с центром I. K_1; K_2; K_3 – точки касания этой окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. K_1P – перпендикуляр на K_2K_3. Докажите, что лучи AO и PI пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

Задача 18. Луч AO пересекает BC в точке T. Точка M_1 – середина BC. Отрезок TM_1 удвоен за точку M_1 – получили точку N. Докажите, что $HN||AO$ (H – ортоцентр в треугольнике ABC).

Задача 19. AH_1 – высота в треугольнике ABC, точка H – ортоцентр. Луч AO пересекает отрезок H_2H_3 в точке Q. Отрезок AQ удвоен за точку Q – получили точку K. Докажите, что точки $O - H - H_1 - K$ лежат на одной окружности.

Задача 20. Точка H – ортоцентр в треугольнике ABC, M_1 – середина BC. Луч AO пересекает BC в точке T. Высота AH_1 пересекает отрезок H_2H_3 в точке F. Докажите, что $FT||HM_1$.

Г.Филипповский,

г.Киев