Удивительное соотношение $\frac{b+c}{a}$

Пусть I – точка пересечения биссектрис (инцентр I в треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Пусть также AL_1 – биссектриса угла A в этом треугольнике *(рис.1)*. Тогда справедливо соотношение $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$ *(1)*.

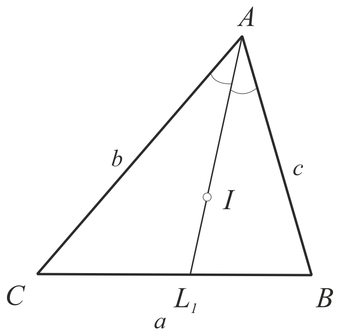

рис.1

Соотношение *(1)* восходит к великому Архимеду, который пользовался им для нахождения верхнего и нижнего пределов числа π.

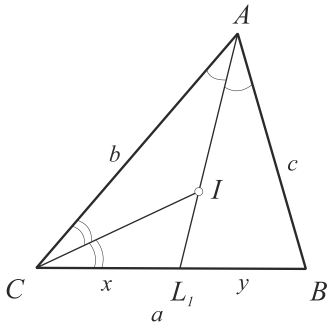

рис.2

Для доказательства *(1)* применим свойство биссектрисы: $\frac{b}{c} = \frac{x}{y}$ *(рис.2)*. Поскольку $x + y = BC = a$, то $y = a - x$. Тогда $\frac{b}{c} = \frac{x}{a-x}$, откуда $x = \frac{ab}{b+c}$. Снова по свойству биссектрисы уже для ΔACL_1 получим: $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b}{x} = \frac{b\cdot(b+c)}{ab} = \frac{b+c}{a}$,

что и требовалось доказать!

Опишем окружность ω около ΔABC и продолжим биссектрису AL_1 до пересечения с ω в точке W *(рис.3)*. Четырехугольник $ABWC$ вписан в окружность ω. Применим для него *теорему Птолемея*. Согласно этой теореме $AW \cdot a = BW \cdot b + CW \cdot c$. Так как $BW = CW = IW$ – *теорема «трилистника»*, то $AW \cdot a = IW \cdot (b+c)$, откуда $\boxed{\frac{AW}{IW} = \frac{b+c}{a}}$ *(2)*.

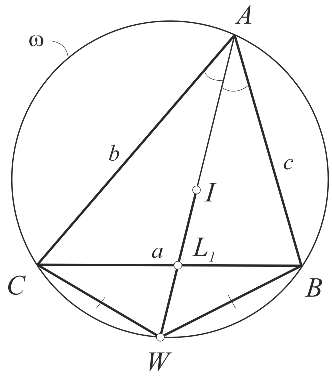

рис.3

Треугольники AWC и CWL_1 подобны. Действительно, угол при вершине W общий, а $\angle WCL_1 = \angle WAC = \frac{A}{2}$. Тогда $\frac{CW}{L_1W} = \frac{AW}{CW}$. Поскольку $CW = IW$ и $\frac{AW}{IW} = \frac{b+c}{a}$, получаем $\boxed{\frac{IW}{L_1W} = \frac{b+c}{a}}$ (3).

На продолжении луча AW находится точка I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон. Известно, что центр вневписанной окружности лежит на пересечении двух внешних и одной внутренней биссектрис (все проведены из разных вершин). Тогда в ΔABC угол $IBI_a = 90°$ (BI – внутренняя биссектриса, а BI_a – внешняя) – *рис.4*. По свойству внешней биссектрисы $\frac{AI_a}{L_1I_a} = \frac{AI}{IL_1}$. Но $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$ *(1)*. Поэтому

$\boxed{\frac{AI_a}{L_1I_a} = \frac{b+c}{a}}$ *(4)*.

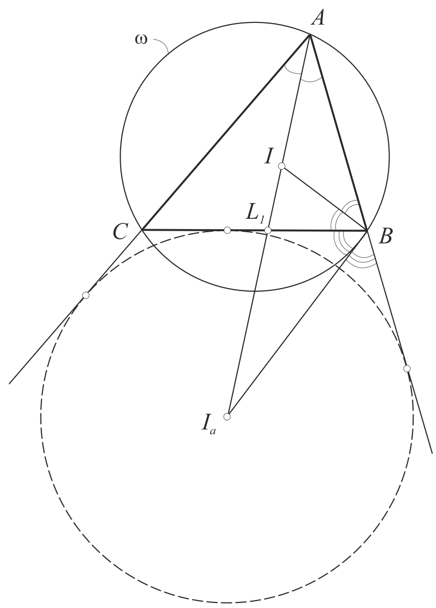

рис.4

<u>Замечание.</u> В таком случае имеет место *гармоническая четверка точек: A; L₁; I; Iₐ*, поскольку: $AI : IL_1 = AI_a : L_1I_a$.

Пусть $AH_1 = h_a$ – высота в треугольнике ABC, а M_1 – середина BC. Известно, что луч M_1I отсекает на высоте AH_1 отрезок $AQ = r$, где r – радиус вписанной в ΔABC окружности *(рис.5)*. Тогда

$$\frac{QH_1}{AQ}=\frac{h_a-r}{r}=\frac{h_a}{r}-1=\frac{2S}{ar}-1=\frac{2p\cancel{r}}{a\cancel{r}}-1=\frac{a+b+c}{a}-1=\frac{b+c}{a}.$$

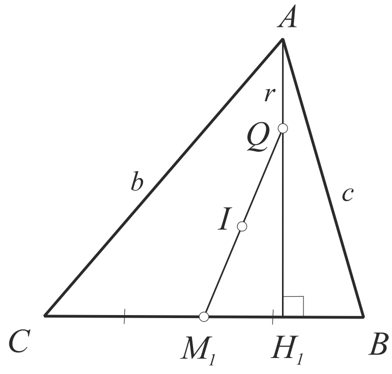

рис.5

Таким образом, $\boxed{\dfrac{QH_1}{AQ}=\dfrac{b+c}{a}}$ *(5)*.

Найдем длину отрезка M_1H_1, считая, что $b > c$ *(рис.5)*. $BM_1=\dfrac{a}{2}$ и

$BH_1 = c\cdot\cos B$ – из ΔABH_1. Следовательно,

$M_1H_1 = BM_1 - BH_1 = \dfrac{a}{2} - c\cdot\cos B$. Согласно теореме косинусов

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. Значит, $M_1H_1=\dfrac{a}{2}-\cancel{c}\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a\cancel{c}}=\boxed{\dfrac{b^2-c^2}{2a}}$.

Очевидно, в общем случае $M_1H_1=\dfrac{\left|b^2-c^2\right|}{2a}$.

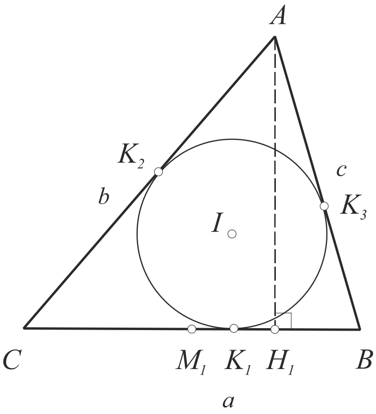

рис.6

Пусть вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, AC и AB в точках K_1; K_2; K_3 соответственно *(рис.6)*. $BK_1 = BK_3$; $CK_1 = CK_2$; $AK_2 = AK_3$ (касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны). Нетрудно подсчитать, что $BK_1 = BK_3 = p - b$ (p – полупериметр). Тогда $M_1K_1=\dfrac{a}{2}-(p-b)=\dfrac{a}{2}-\dfrac{a+c-b}{2}=\dfrac{b-c}{2}$ (в общем случае $\dfrac{|b-c|}{2}$). В таком случае $\dfrac{M_1H_1}{M_1K_1}=\dfrac{\frac{b^2-c^2}{2a}}{\frac{b-c}{2}}=\dfrac{(\cancel{b-c})(b+c)}{a(\cancel{b-c})}$, то есть $\boxed{\dfrac{M_1H_1}{M_1K_1}=\dfrac{b+c}{a}}$ *(6)*.

Покажем, как предложенные 6 соотношений помогают при решении разнообразных задач.

Задача 1.

В треугольнике ABC с тупым углом A биссектриса AL_1 пересекает вписанную окружность в точках D и F *(рис.7)*. Что больше: AD или FL_1?

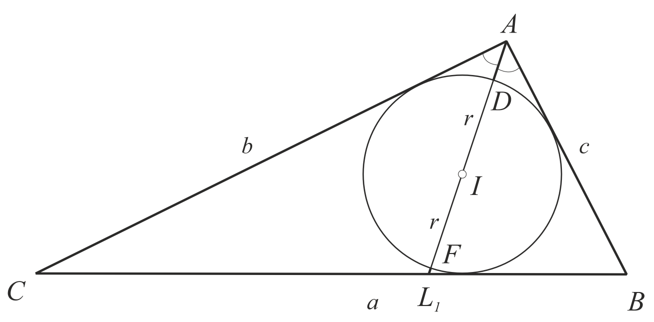

рис.7

Решение.

Согласно *(1)* $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$ и $AI > IL_1$ ($b + c > a$ – неравенство треугольника). Отнимем от AI и IL_1 по радиусу r вписанной окружности и получим $\boxed{AD > FL_1}$.

Задача 2.

Известно, что в треугольнике ABC стороны связаны соотношением: $b + c = 2a$. Докажите, что $MI \parallel BC$ (M – центроид, точка пересечения медиан треугольника ABC).

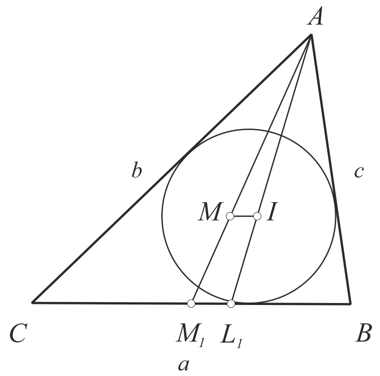

рис.8

Доказательство.

Так как $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a} = \frac{2a}{a} = 2$ и $\frac{AM}{MM_1} = \frac{2}{1} = 2$ (свойство центроида M), то, очевидно, $MI \parallel BC$ *(рис.8)*.

Задача 3.

В треугольнике ABC выполняется равенство: $ctg\frac{A}{2} = \frac{b+c}{a}$. Докажите, что этот треугольник – прямоугольный.

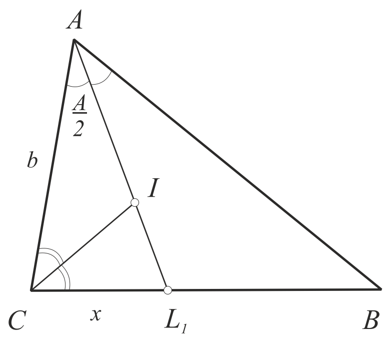

рис.9

Доказательство.

$\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$ и $\frac{AI}{IL_1} = \frac{AC}{CL_1}$ (*по свойству биссектрисы угла ACB*). Значит, $\frac{AC}{CL_1} = \frac{b+c}{a} = ctg\frac{A}{2}$. Тогда в ΔACL_1 *(рис.9)* AC – прилежащий катет, CL_1 – противолежащий катет, то есть $\angle ACB = 90°$.

Задача 4.

В треугольнике ABC известны длины отрезков: $AL_1 = l$; $L_1W = n$. Найти длину отрезка IW *(рис.10)*.

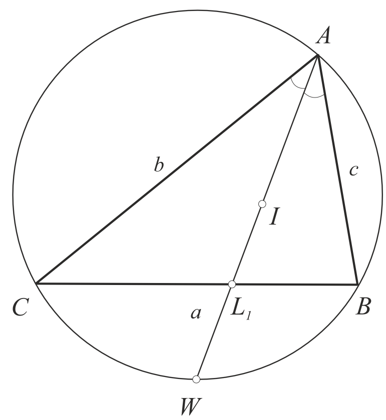

рис.10

Решение.

Согласно *(3)* $\frac{IW}{L_1W} = \frac{b+c}{a}$ и $IW = L_1W \cdot \frac{b+c}{a} = n \cdot \frac{b+c}{a}$. С учетом *(2)*: $\frac{AW}{IW} = \frac{b+c}{a}$, получаем: $IW = n \cdot \frac{b+c}{a} = n \cdot \frac{AW}{IW}$, откуда

$IW^2 = n \cdot AW = n(AL_1 + L_1W) = n(l + n)$. Значит, $\boxed{IW = \sqrt{n(l+n)}}$.

Задача 5.

Докажите, что $\frac{AW}{L_1W} = \left(\frac{b+c}{a}\right)^2$.

Решение.

Запишем соотношение $\frac{AW}{L_1W}$ так: $\frac{AW}{L_1W}=\frac{AW}{IW}\cdot\frac{IW}{L_1W}$. Поскольку $\frac{AW}{IW}=\frac{b+c}{a}$ *(2)* и $\frac{IW}{L_1W}=\frac{b+c}{a}$ *(3)*, то

$\boxed{\frac{AW}{L_1W}=\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}$.

Задача 6.

Известно, что в треугольнике *ABC* выполнено соотношение $\frac{AL_1}{L_1W}=k$ и *BC* = *a*. Найдите периметр треугольника *ABC*.

Решение.

$AL_1=AW-L_1W$ *(рис.10)*. Следовательно, $\frac{AL_1}{L_1W}=\frac{AW-L_1W}{L_1W}=\frac{AW}{WL_1}-1=\left(\frac{b+c}{a}\right)^2-1$ (задача *5*). Так как по условию $\frac{AL_1}{L_1W}=k$, то $\left(\frac{b+c}{a}\right)^2=k+1$, или $\frac{b+c}{a}=\sqrt{k+1}$ и $b+c=a\sqrt{k+1}$. Значит,

$2p=a+b+c=a+a\sqrt{k+1}$ или $\boxed{2p=a(1+\sqrt{k+1})}$.

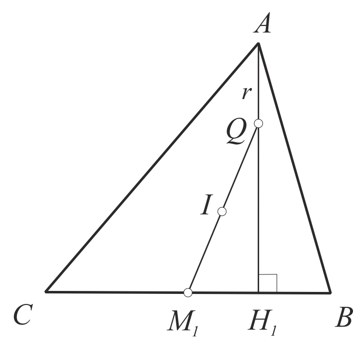

рис.11

Задача 7.

Докажите, что в принятых нами обозначениях выполняется равенство:
$\frac{AI}{IL_1}-\frac{IL_1}{L_1W}=1$.

Доказательство.

$\frac{AI}{IL_1}=\frac{b+c}{a}$ – согласно *(1)*. $\frac{IL_1}{L_1W}=\frac{IW-L_1W}{L_1W}=\frac{IW}{L_1W}-1$, где $\frac{IW}{L_1W}=\frac{b+c}{a}$ – по формуле *(3)*. Получаем: $\frac{AI}{IL_1}-\frac{IL_1}{L_1W}=\frac{b+c}{a}-\left(\frac{b+c}{a}-1\right)=1$.

Задача 8.

В треугольнике *ABC* выполняется равенство: *b* + *c* = *2a*. Найдите высоту AH_1, если радиус вписанной окружности равен *r*.

Решение.

Как уже было сказано, луч M_1I пересекает высоту AH_1 в такой точке *Q*, что *AQ* = *r* *(рис.11)*. По формуле *(5)* $\frac{QH_1}{AQ}=\frac{b+c}{a}=\frac{2a}{a}=\frac{2}{1}$. Тогда $QH_1=2r$ и $AH_1=r+2r=3r$.

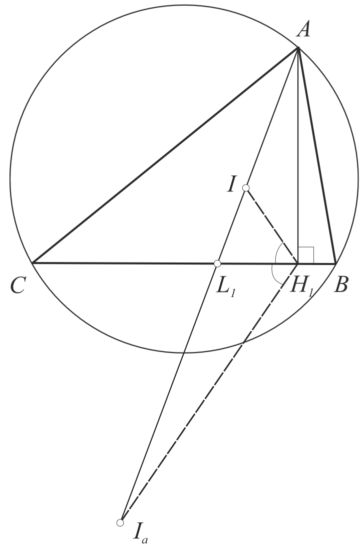

рис.12

Задача 9.

Докажите, что сторона *BC* является биссектрисой угла IH_1I_a *(рис.12)*.

Доказательство.

Согласно *(4)* $\frac{AI_a}{L_1I_a}=\frac{b+c}{a}$. С учетом *(1)* получаем: $\frac{AI_a}{L_1I_a}=\frac{AI}{IL_1}$, или

$\dfrac{I_aL_1}{IL_1}=\dfrac{AI_a}{AI}$. В таком случае H_1L_1 – внутренняя биссектриса в ΔIH_1I_a, а H_1A – внешняя биссектриса в этом треугольнике.

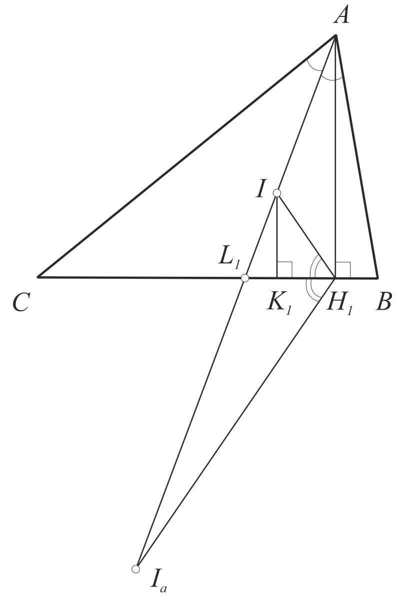

рис.13

Задача 10.
Постройте треугольник ABC по таким трем точкам: I; H_1; I_a.

Решение.
Соединим точки I; H_1; I_a и проведем биссектрису угла IH_1I_a *(рис.13)*. По *задаче 9* она совпадает с прямой BC. Из инцентра I проведем перпендикуляр $IK_1 = r$ к прямой BC, а из H_1 восстановим перпендикуляр к BC, который даст вершину A в пересечении с прямой I_aI. Затем проведем окружность с центром I радиуса $IK_1 = r$. Касательные к ней из вершины A пересекают прямую BC в недостающих вершинах B и C.

Задача 11.
Постройте треугольник ABC по a; l_a; $b + c$.

Построение.
Построим отрезок $AL_1 = l_a$. Построим также точку I – с учетом того, что $\dfrac{AI}{IL_1}=\dfrac{b+c}{a}$ *(1)*. Затем на прямой AL_1 построим точку I_a, поскольку $\dfrac{AI_a}{I_aL_1}=\dfrac{b+c}{a}$ *(4)*. Построим окружность q на отрезке II_a как на диаметре *(рис.14)*. Через точку L_1 проведем в окружности q хорду данной длины a *(покажите, как это сделать!)*. В пересечении с окружностью q получим вершины B и C.

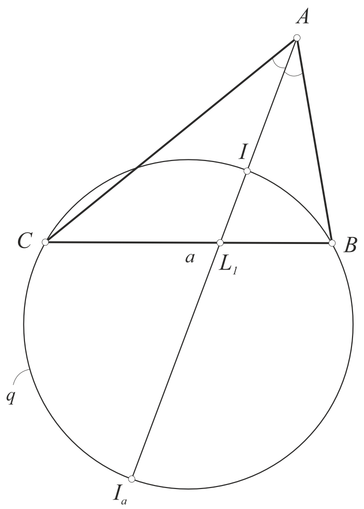

рис.14

Несколько задач на соотношение $\boxed{\dfrac{b+c}{a}}$ предложим решить самостоятельно.

Задача 12. Через инцентр I треугольника ABC со сторонами a, b, c проведена прямая параллельно BC. Она пересекает AC и AB в точках D и F соответственно. Найдите длину отрезка DF.

Задача 13. В треугольнике ABC угол A – прямой. Известно, что $\dfrac{AI}{IL_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Найдите величины углов B и C.

Задача 14. Докажите, что в треугольнике ABC $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}\ge\dfrac{b+c}{a}$.

Задача 15. Докажите справедливость неравенства для произвольного треугольника ABC:
$$\frac{AI}{AL_1}\cdot\frac{BI}{BL_2}\cdot\frac{CI}{CL_3}\le\frac{8}{27}.$$

Задача 16. Докажите справедливость неравенства: $M_1H_1 \geq \frac{|b-c|}{2}$.

Г.Филипповский