Вокруг полупериметра ортоцентрического треугольника

Мы поведем разговор о полупериметре (периметре) ортоцентрического треугольника, вершины которого – основания высот остроугольного треугольника ABC. Но сначала выведем важную для нашего разговора формулу. Пусть H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC площади S. Докажите, что
$a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH = 4S$.

Пусть O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки M_1; M_2; M_3 – соответственно середины сторон BC, AC и AB, где $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ *(рис.1)*.

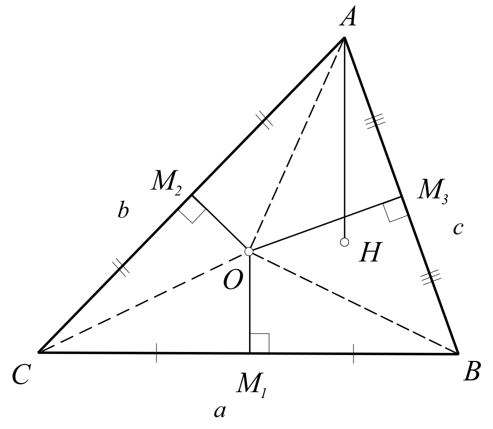

рис.1

Очевидно, площадь треугольника ABC складывается из площадей треугольников BOC, AOC и AOB, то есть
$S = \frac{1}{2}a \cdot OM_1 + \frac{1}{2}b \cdot OM_2 + \frac{1}{2}c \cdot OM_3$. Поскольку $AH = 2OM_1$, $BH = 2OM_2$ и $CH = 2OM_3$ *(покажите!)*, то получаем требуемое:

$a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH = 4S$.

Задача 1.

Дан остроугольный треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и углами A, B, C. Докажите, что периметр его ортоцентрического треугольника равен

$a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C$.

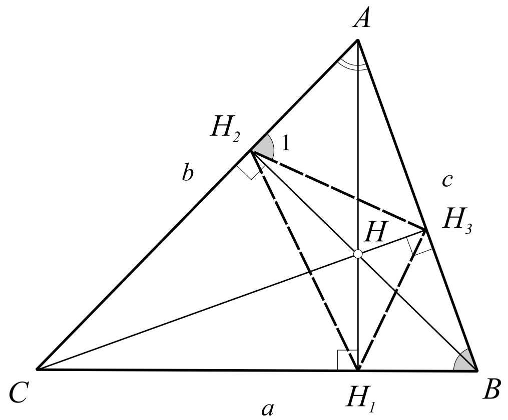

рис.2

Доказательство.

Пусть AH_1; BH_2; CH_3 – высоты в остроугольном ΔABC *(рис.2)*. Поскольку точки B; H_3; H_2; C лежат на одной окружности с диаметром BC, то $\angle 1 = B$ и треугольники AH_2H_3 и ABC подобны по двум углам. Тогда $\frac{H_2H_3}{a} = \frac{AH_2}{AB}$. Но из ΔAH_2B находим: $\cos A = \frac{AH_2}{AB}$. Следовательно, $H_2H_3 = a\cos A$.
Аналогично $H_3H_1 = b\cos B$ и $H_1H_2 = c\cos C$ и периметр $2p_H$ ортоцентрического $\Delta H_1H_2H_3$ равен $a\cos A + b\cos B + c\cos C$.

Задача 2.

Докажите, что полупериметр ортоцентрического треугольника находится по формуле: $p_H = \frac{S}{R}$, где S – площадь тругольника ABC, R – радиус описанной около него окружности.

Доказательство.

Так как $\Delta AH_2H_3 \sim \Delta ABC$, то $\frac{H_2H_3}{a} = \frac{AH}{2R}$, где AH и $2R$ – диаметры описанных окружностей треугольников AH_2H_3 и ABC соответственно. Таким образом, $\frac{AH}{2R} = \cos A = \frac{H_2H_3}{a}$, откуда $H_2H_3 = \frac{a \cdot AH}{2R}$.
Аналогично $H_3H_1 = \frac{b \cdot BH}{2R}$ и $H_1H_2 = \frac{c \cdot CH}{2R}$. Значит, $2p_H = \frac{a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH}{2R}$, или $2p_H = \frac{4S}{2R} = \frac{2S}{R}$, или $\boxed{p_H = \frac{S}{R}}$.

Задача 3.

Докажите, что периметр $2p_H$ ортоцентрического треугольника не превышает полупериметр остроугольного треугольника ABC.

Доказательство.

Сравним $2p_H = \frac{2S}{R}$ и $p = \frac{S}{r}$ (p – полупериметр ΔABC, r – радиус его вписанной окружности). После сокращения на S получаем: $\frac{2}{R} \vee \frac{1}{r}$, или $2r \vee R$. Поскольку $R \geq 2r$ (что следует из формулы Эйлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$), то, очевидно $2p_H \leq p$.

Задача 4.

Докажите справедливость неравенства $\boxed{a\cos A + b\cos B + c\cos C \leq p}$.

Доказательство.

Так как $2p_H = a\cos A + b\cos B + c\cos C$, то, согласно *задаче 3*, требуемое неравенство доказано.

Задача 5.

AH_1 – высота в остроугольном треугольнике ABC. Из H_1 проведены перпендикуляры H_1F и H_1T к сторонам AC и AB соответственно. Докажите, что $FT = p_H$ *(рис.3)*.

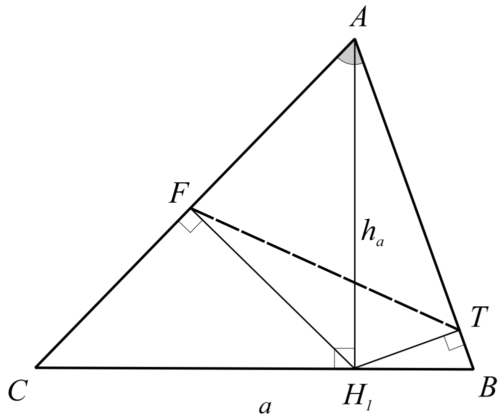

рис.3

Доказательство.

Около четырехугольника AFH_1T можно описать окружность с диаметром $AH_1 = h_a$ (два противоположных угла равны по 90°). Тогда по *теореме синусов* для ΔAFT получаем: $\frac{FT}{\sin A} = h_a$, или $FT = h_a \cdot \sin A = \frac{2S}{a} \cdot \sin A = \frac{2S}{2R} = \frac{S}{R}$. Поскольку также $p_H = \frac{S}{R}$ *(задача 2)*, то $FT = p_H$.

Задача 6.

Что больше для углов A, B, C остроугольного треугольника ABC:

$\sin A + \sin B + \sin C$ или $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$.

Решение.

С учетом теоремы синусов для ΔABC получаем: $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{2p}{2R} = \frac{p}{R}$,

$H_2H_3 = a\cos A = 2R\sin A\cos A = R \cdot \sin 2A$.

Аналогично $H_3H_1 = R\sin 2B$ и $H_1H_2 = R\sin 2C$.

Тогда $2p_H = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$ и $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2p_H}{R}$. Но $2p_H \leq p$ *(задача 3)*.

Следовательно $\frac{2p_H}{R} \leq \frac{p}{R}$ и $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C$.

Задача 7.

В остроугольном треугольнике ABC величина угла A равна 45°. AD – перпендикуляр к отрезку H_2H_3 *(рис.4)*. Докажите, что $AD = p_H$.

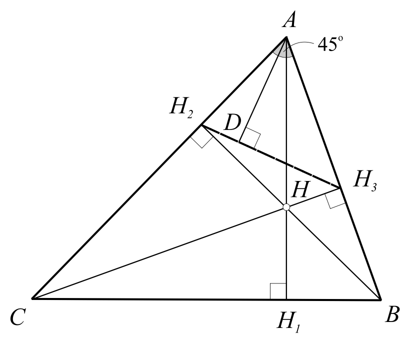

рис.4

Доказательство.

AD и $AH_1 = h_a$ – соответствующие высоты в подобных треугольниках AH_2H_3 и ABC. Значит, $\frac{AD}{h_a} = \cos A$, откуда $AD = h_a\cos A = \frac{2S}{a}\cos A = \frac{2S}{2R\sin A}\cos A = \frac{S}{R} \cdot ctgA$. Так как $ctg\, 45° = 1$, то $AD = \frac{S}{R} = p_H$.

Задача 8.

Радиус r_a вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон, равен радиусу R описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что в таком случае $\boxed{p_H = p - a}$.

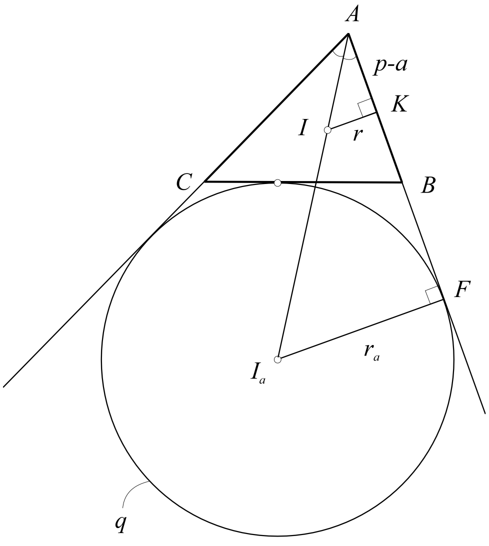

рис.5

Доказательство.

Пусть вневписанная окружность q касается прямой AB в точке F *(рис.5).* Известно, что длина отрезка AF равна p – полупериметру ΔABC *(покажите!).* Центр I_a окружности q находится на пересечении внешних биссектрис углов B и C и внутренней биссектрисы угла A. Очевидно, $IK = r$, а $AK = p - a$. Из подобия ΔAIK и ΔAI_aF получаем: $\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$, или $r_a \cdot (p-a) = pr = S$, откуда $r_a = \frac{S}{p-a}$. По условию $r_a = R$. Тогда $R = \frac{S}{p-a}$, или $p - a = \frac{S}{R} = p_H$, то есть $\boxed{p_H = p - a}$.

Задача 9.

Найдите площадь остроугольного треугольника ABC, если стороны его ортоцентрического треугольника равны: $H_1H_3 = 5$; $H_1H_2 = 12$; $H_2H_3 = 13$.

Решение.

Стороны ортоцентрического треугольника составляют «Пифагорову тройку». Поэтому отрезок $H_2H_3 = 13$ – диаметр описанной окружности $\Delta H_1H_2H_3$. Описанная окружность $\Delta H_1H_2H_3$ – это окружность Эйлера. Известно, что радиус окружности Эйлера в 2 раза меньше радиуса описанной окружности треугольника ABC: $R_э = \frac{R}{2}$. Тогда $2R_э = 13 = R$.

Найдем полупериметр ортоцентрического треугольника: $p_H = \frac{5+12+13}{2} = 15$.

Поскольку $p_H = \frac{S}{R}$, то $S = p_H \cdot R = 15 \cdot 13 = 195$ (кв.ед.).

Несколько задач на данную тему предложим решить самостоятельно.

Задача 10. Стороны остроугольного треугольника ABC равны a, b, c. Его углы A, B, C. Докажите, что числа $a\cos A$; $b\cos B$; $c\cos C$ – стороны некоторого треугольника.

Задача 11. Докажите справедливость равенства: $\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a+b+c} = \frac{r}{R}$.

Задача 12. Отрезок H_2H_3 делит площадь треугольника ABC пополам, если $A=45^\circ$. Докажите!

Задача 13. Дан остроугольный треугольник ABC с описанной около него окружностью ω и указанным ортоцентром H *(рис.6).* Пользуясь только линейкой постройте отрезок длиной p_H.

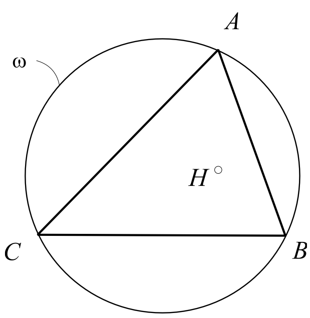

рис.6

Г.Филипповский