Достроить до трапеции!

Достраивая треугольник *ABC* до трапеции *ADCB*, когда прямая, проведенная через вершину *A* параллельно *BC*, пересекает описанную окружность треугольника *ABC* в точке *D*, мы получаем равнобокую трапецию.

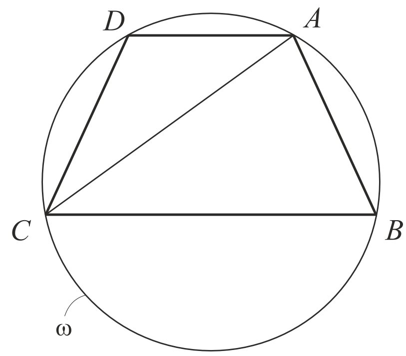

рис.1

Действительно, только около равнобокой трапеции можно описать окружность ω *(рис.1)*. Это позволяет подметить некоторые свойства и закономерности, позволяющие существенно продвинуть решение задачи.

Покажем, как достраивание до трапеции помогает решить целый ряд геометрических заданий!..

Задача 1.

Постройте треугольник *ABC* по сторонам $AC = b$, $AB = c$ и разности углов $B - C$.

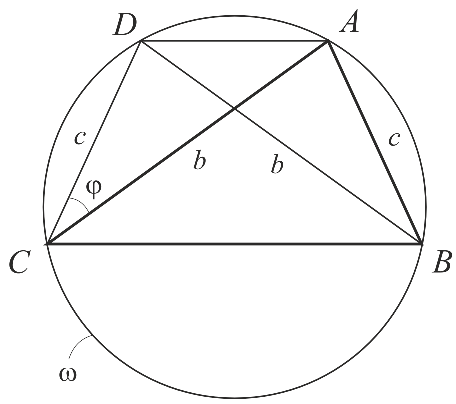

рис.2

Решение.

Анализ показывает, что если мы опишем окружность ω около ΔABC и достроим его до равнобокой трапеции *ADCB*, то $DC = AB = c$, а $\angle DCA = B - C = \varphi$ *(рис.2)*. Тогда ΔCDA можно построить по двум сторонам b, c и углу $\varphi = B - C$ между ними. Засечка из вершины *A* раствором циркуля, равным *c*, и вторая засечка из *D* расвором циркуля *b* (диагонали равнобокой трапеции равны) в пересечении дадут недостающую вершину *B* треугольника *ABC*.

Задача 2.

В треугольнике *ABC* $(B > C)$ медиана AM_1 видна из центра описанной около него окружности под прямым углом. Найдите разность углов $B - C$ в треугольнике *ABC*.

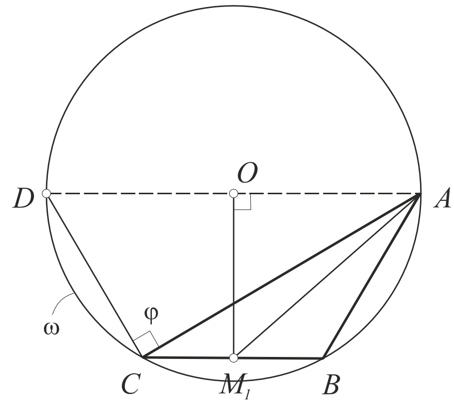

рис.3

Решение.

Очевидно, ΔABC – тупоугольный *(покажите!)* и точка *O* – центр его описанной окружности ω – находится вне треугольника. Достроим ΔABC до равнобокой трапеции *ADCB* *(рис.3)*. Тогда $AD = 2R$ – диаметр ω $(OA = R)$, а $\angle DCA = \varphi = B - C$. Но угол φ – вписанный в окружность ω, опирающийся на диаметр *AD*. Следовательно, $\varphi = B - C = 90°$.

Задача 3.

В треугольнике *ABC* разность углов $B - C$ равна 90°. Высота $AH_1 = h_a$, медиана $AM_1 = m_a$. Найдите радиус окружности ω, описанной около треугольника *ABC*.

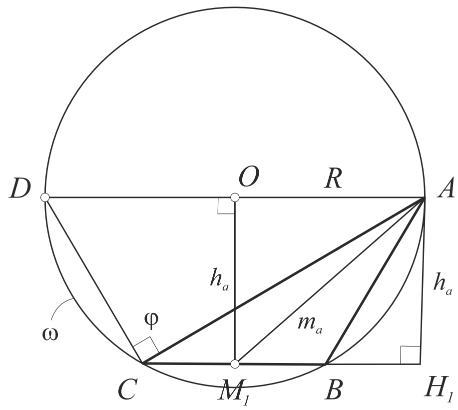

рис.4

Решение.

В *задаче 2* было показано, что при $B - C = 90°$ угол AOM_1 прямой. Тогда, поскольку OAH_1M_1 – прямоугольник *(рис.4)*, $AH_1 = OM_1$. А значит, из ΔAOM_1 $R=\sqrt{m_a^2-h_a^2}$.

Задача 4.

Дан треугольник *ABC* со сторонами *BC = a, AC = b, AB = c (b>c)*. Найдите расстояние от центра описанной около него окружности *ω* до высоты AH_1.

Решение.

Пусть *OK = x* – искомое расстояние. Достроим ΔABC до равнобокой трапеции *ADCB* и проведем в ней высоту *DF (рис.5)*.

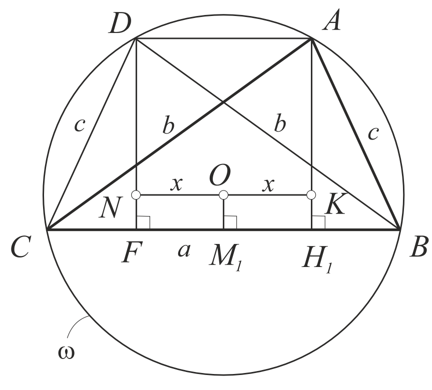

рис.5

Очевидно, *NK = DA = 2x, DC = AB = c, BD = AC = b*. Согласно *теореме Птолемея* для вписанного четырехугольника *ABCD* получаем: $a\cdot 2x+c^2=b^2$, откуда $\boxed{x=\dfrac{b^2-c^2}{2a}}$.

Замечание 1. Можно убедиться, что для случая тупоугольного треугольника ситуация не меняется.

Замечание 2. Перпендикуляр из *O* к *BC* проходит через M_1 – середину *BC* (*O* – точка пересечения серединных перпендикуляров). Поэтому $M_1H_1=OK=x=\dfrac{b^2-c^2}{2a}$. А длина отрезка M_1H_1 часто бывает необходима при решении Олимпиадных задач.

Задача 5.

Докажите теорему косинусов для треугольника *ABC*:

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$.

Доказательство.

Достроим ΔABC до равнобокой трапеции *ADCB*. Проведем в ней высоты AH_1 и *DF (рис.6)*. $BH_1=c\cdot\cos B$ (из ΔABH_1) и BH_1 = *CF*. Тогда $H_1F=a-2c\cdot\cos B=DA$.

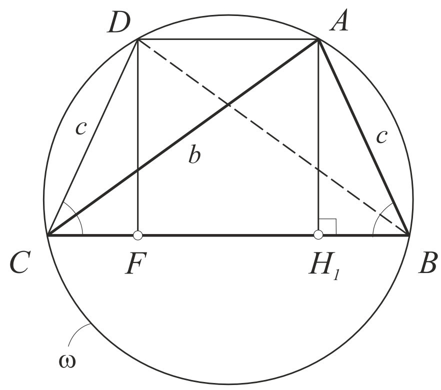

рис.6

Применим *теорему Птолемея* для вписанного четырехугольника *ADCB*, в котором *BC = a, CD = AB = c, BD = AC = b*, $DA=FH_1=a-2c\cdot\cos B$: $b^2=a\cdot(a-2c\cdot\cos B)+c^2$, или

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$.

Задача 6. *(Теорема Архимеда)*

P – середина дуги *BAC* описанной окружности *ω* треугольника *ABC*. *PK* – перпендикуляр к стороне *AC*. Докажите, что *CK = KA + AB (перпендикуляр из середины дуги делит ломаную пополам)*, или *x = y + z (рис.7)*.

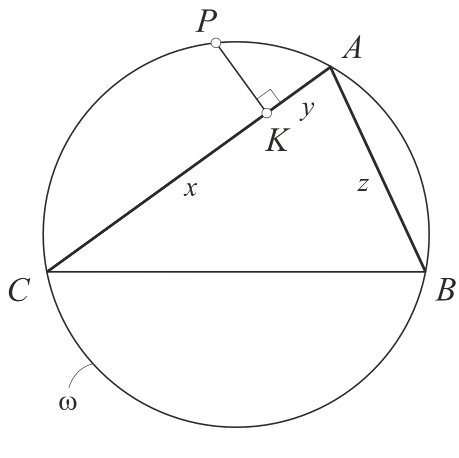

рис.7

Доказательство.

Достроим ΔAPC до равнобокой трапеции *APQC*, вписанной в окружность *ω (рис.8)*. Проведем $QT\perp AC$. Очевидно, *CT = AK*. Тогда остается доказать, что *TK = AB*. Поскольку *PA = QC*, то и соответствующие дуги равны. Дуги *P – Q – C* и *P – A – B* равны по условию. Следовательно, $\cup PQ = \cup AB$. Значит, равны и хорды: $PQ = AB$. Так как $PQ = TK$ ($PQTK$ – прямоугольник), то $TK = AB$. Тогда $CK = KA + AB$.

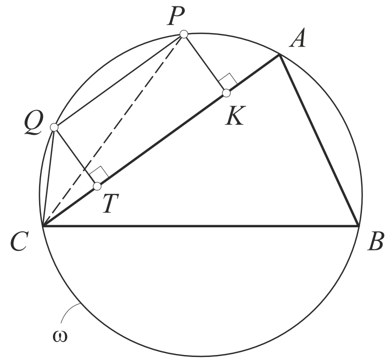

рис.8

Задача 7. *(задача Архимеда)*

Перпендикулярные хорды AB и CD точкой пересечения F делятся на отрезки: $AF = a$, $BF = b$, $CF = c$, $DF = d$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$, где R – радиус окружности ω.

Доказательство.

Достроим ΔACD до равнобокой трапеции $ANCD$, вписанной в окружность ω *(рис.9)*. При этом $NB = 2R$ – диаметр ω ($\angle NAB = 90°$). $AD^2 = a^2 + d^2$ – из ΔAFD и $AD = NC$. $BC^2 = b^2 + c^2$ – из ΔCFB. Угол BCN – прямой (вписанный, опирается на диаметр). Тогда по теореме Пифагора для ΔBCN получаем: $BC^2 + CN^2 = BN^2$, или $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$.

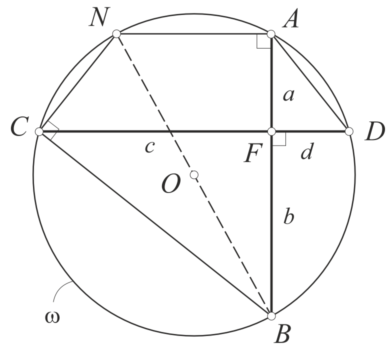

рис.9

Задача 8.

AH_1 – высота в остроугольном ΔABC, а точка M – центроид в этом треугольнике. Луч H_1M пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что $QM = 2MH_1$.

Доказательство.

Проведем медиану AM_1 в треугольнике ABC. Затем достроим треугольник ABC до равнобокой трапеции $ADCB$, вписанной в окружность ω *(рис.10)*. Проведем также высоту DF в этой трапеции. Очевидно, M_1 – как середина BC, так и середина FH_1.

Соединим D и H_1. Пусть DH_1 и AM_1 пересекаются в точке T. $\Delta ATD \sim \Delta M_1TH_1$ с коэффициентом подобия 2:1 ($AD = 2M_1H_1$). Следовательно, $AT : TM_1 = 2:1$. Но и $AM : MM_1 = 2:1$, то есть точки T и M совпадают. Тогда лучи H_1T и H_1M совпадают, а значит, совпадают и точки D и Q. Поскольку коэффициент подобия равен 2:1, то $QM = 2MH_1$, что и требовалось доказать!..

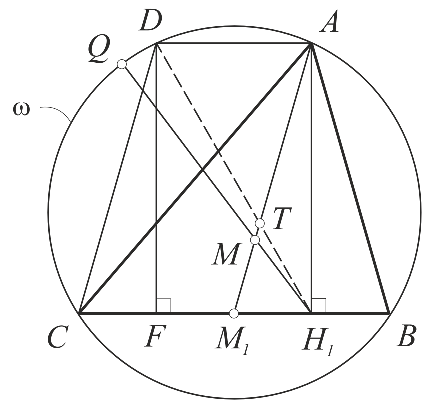

рис.10

Задача 9.

В треугольнике ABC разность углов $B - C$ равна 90°. Найдите стороны b и c, если известны R и a.

Решение.

Достроим ΔABC до равнобокой трапеции $ADCB$, вписанной в окружность ω. Мы уже знакомы с этой конструкцией *(задачи 2, 3)*. $DC = AB = c$, $\angle ACD = 90°$, $M_1H_1 = OA = R$ *(рис.11)*. Тогда

$b^2 + c^2 = 4R^2$ (из ΔACD) и $M_1H_1 = \dfrac{b^2 - c^2}{2a} = R$. Получаем систему

$\begin{cases} b^2 + c^2 = 4R^2 \\ b^2 - c^2 = 2aR \end{cases}$, откуда $b = \sqrt{R(2R + a)}$; $c = \sqrt{R(2R - a)}$.

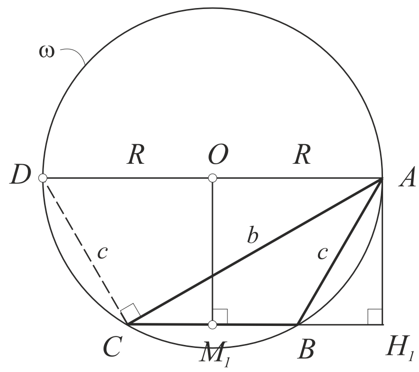

рис.11

Несколько задач на тему «Достроить до трапеции» предложим для самостоятельного решения.

Задача 10. В треугольнике ABC известно, что $B = 2C$. Докажите, что $b^2 = c^2 + ac$.

Задача 11. В треугольнике ABC точка H – ортоцентр, AL_1 – биссектриса, AM_1 – медиана. Восстановите треугольник ABC по точкам H; L_1; M_1, если известно, что $B - C = 90°$.

Задача 12. Постройте треугольник ABC по радиусу описанной окружности и биссектрисе угла A, если известно, что разность углов B и C равна 90º.

Задача 13. Впишите в данную окружность ω треугольника ABC, если известна длина высоты $AH_1 = h_a$ и разность углов $B - C = 90°$.

Задача 14. Если в треугольнике ABC разность $B - C = 90°$, то справедливо неравенство $b^2 + c^2 \geq 16r^2$.

Задача 15. Для треугольника ABC, в котором $B - C = 90°$, выполняется неравенство $a < R\sqrt{5}$. Докажите!

Г.Филипповский