«Куриная лапка» в геометрии

(мемуары Барона Мюнхгаузена)

Как только не называют этот красивый факт геометрии треугольника! И теоремой «трилистника», и теоремой Клайнера, и леммой «о трезубце», и леммой Мансиона. Мне же, Друзья мои, более всего нравится говорить: теорема «о куриной лапке». Ну, разве не похожа конструкция *рис.1* на куриную лапку? Здесь $IW = WB = WC = WI_a$ (I – центр вписанной в ΔABC окружности, W – точка пересечения продолжения биссектрисы угла A с описанной около ΔABC окружностью, I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC). Не сомневаюсь, Друзья мои, что вы сами докажете эту удивительную теорему. Но если у кого-то возникнут трудности, вот несколько намеков: *а)* $BW = CW$ – как хорды, стягивающие равные дуги; *б)* $CW = IW$ – из равенства двух углов в ΔIWC; *в)* $\angle ICI_a = 90°$ – как угол между биссектрисами смежных углов.

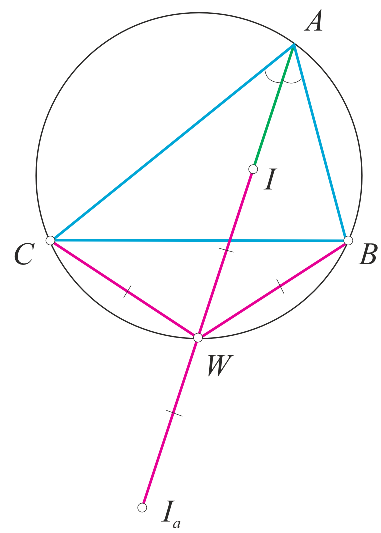
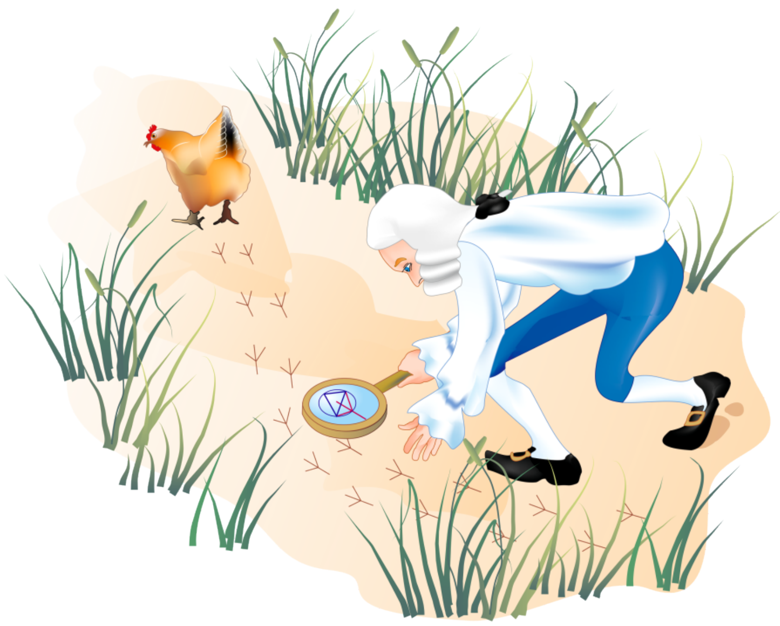


рис.1



А теперь – мои любимые задачи на «куриную лапку», которые призваны подтвердить красоту, важность, полезность этой теоремы!..

Задача 1.

Восстановите треугольник ABC по вершине A, а также точкам F, N, W (F и N – точки пересечения биссектрисы угла A со вписанной в ΔABC окружностью).

Решение.

Разделив отрезок FN пополам, получим точку I – центр вписанной в ΔABC окружности *(рис.2)*. Построим эту окружность и из вершины A проведем касательные к ней. Они совпадают со сторонами AB и AC треугольника ABC. По теореме о куриной лапке $IW = BW = CW$.

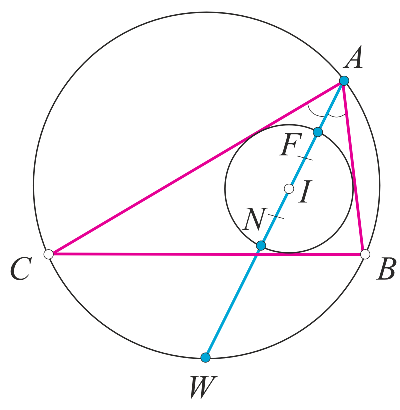


рис.2

Поэтому засечки из точки W раствором циркуля, равным WI, пересекут продолжения касательных в недостающих вершинах B и C.

Задача 2.

Восстановите треугольник ABC по центрам трех его окружностей: описанной O, вписанной I и вневписанной I_a, касающейся стороны BC.

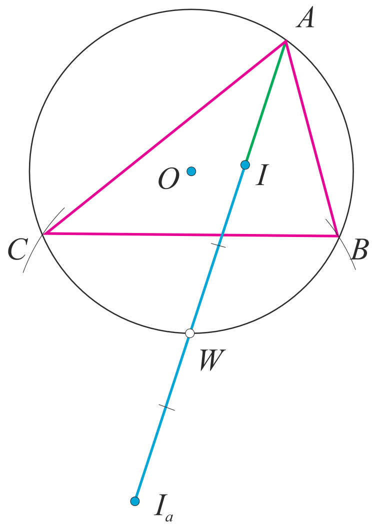


рис.3

Решение.

Соединив I_a и I, разделим отрезок II_a пополам – получим точку W (согласно «лемме о куриной лапке»). С центром O радиусом OW построим окружность, описанную около ΔABC *(рис.3)*. Луч II_a вторично пересекает ее в вершине A. Из точки W раствором циркуля, равным WI, делаем засечки на окружности – получаем вершины B и C.

Задача 3.

В остроугольном треугольнике ABC отрезок «куриной лапки» $WI = n$. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника, если $A = 60°$.

Решение.

<u>I способ.</u> Согласно теореме «о куриной лапке» $WI = WB = WC$. Поэтому точка W является центром описанной окружности треугольника BIC *(рис.4)*. При этом

$$\angle BIC = 90° + \frac{A}{2} = 90° + 30° = 120°.$$

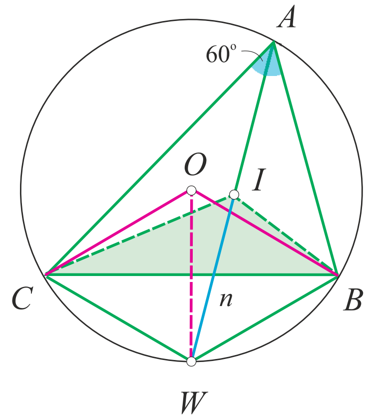


рис.4

$\angle BOC = 2A = 2 \cdot 60° = 120°$ – центральный для описанной окружности ΔABC. Так как $\angle BIC = \angle BOC = 120°$, то точка O лежит на окружности с центром W и радиусом WI. Следовательно, $OW = R = IW = n$.

<u>II способ.</u> По теореме синусов $\dfrac{BW}{\sin\dfrac{A}{2}} = 2R$, где R – радиус окружности, описанной около ΔABW и около ΔABC (это одна и та же окружность).

Поскольку $BW = IW = n$ («куриная лапка»), то $\dfrac{n}{\sin 30°} = 2R$. Откуда $R = n$.

Задача 4.

В треугольнике ABC известно, что $A = 2B$, $BC = a$, $AC = b$. Найдите расстояние AI от вершины A до центра вписанной в ΔABC окружности.

Решение.

Продолжим AI до пересечения с описанной окружностью ΔABC в точке W. Соединим BW и CW *(рис.5)*.

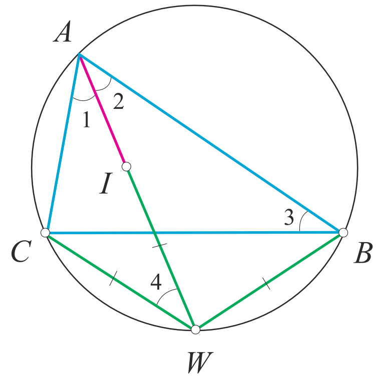


рис.5

Согласно условию, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. Но $\angle 3 = \angle 4$ – вписанные, опираются на одну дугу. Так как $\angle 2 = \angle 4$, то $AB \parallel CW$ и $ABWC$ – равнобокая трапеция (описать окружность можно около равнобокой трапеции). Тогда $AW = BC = a$ и $BW = AC = b$. С учетом «куриной лапки» ($BW = IW = b$) получаем: $AI = AW - IW = a - b$.

Задача 5.

Постройте прямоугольный треугольник *ABC (A=90°)* по вершинам *B, C* и точке *T* касания вневписанной окружности со стороной *BC*.

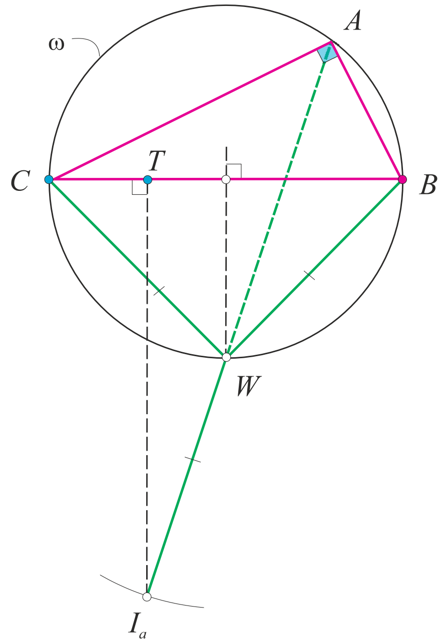


рис.6

Решение.

Очевидно, гипотенуза *BC* будет диаметром окружности ω, описанной около ΔABC. Построим на *BC* как на диаметре окружность ω. Серединный перпендикуляр к *BC* пересекает нижнюю половину окружности в точке *W (рис.6)*. При этом $WB = WC = WI_a$ (теорема «о куриной лапке»). Далее из точки *T* проведем перпендикуляр к *BC*. Засечка из *W* раствором циркуля, равным длине «куриной лапки», пересекает этот перпендикуляр в точке I_a. Луч I_aW пересекает вторично окружность ω в недостающей вершине *A*.

Задача 6.

Около равнобедренного треугольника *ABC (AB = AC)* описана окружность ω. Окружность *s* касается боковых сторон в точках *F* и *N*, а окружности ω – в точке *D (рис.7)*. Докажите, что *K* – середина *FN* – совпадает с инцентром *I* треугольника *ABC*.

Решение.

Очевидно, что точки *A, K* и *D* лежат на одной прямой *(покажите!)*. При этом *D* совпадает с *W*, а $FN \parallel BC$ (ΔABC – равнобедренный). Отрезок AW совпадает с высотой, медианой и биссектрисой – как в ΔAFN, так и в ΔABC. Соединив *B* и *W,* получим $\angle ABW = 90°$ (вписанный, опирается на диаметр *AW*). Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (ΔFWN – равнобедренный) и $\angle 1 = \angle 3$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой), то $\angle 2 = \angle 3$. Тогда $\Delta WBN = \Delta WKN$ – по гипотенузе и острому углу. Значит, $WB = WK$. Но *WB* – отрезок «куриной лапки». Тогда и *WK* такой же отрезок. Но *WK* принадлежит биссектрисе угла *A* треугольника *ABC*. Следовательно, $K \equiv I$.

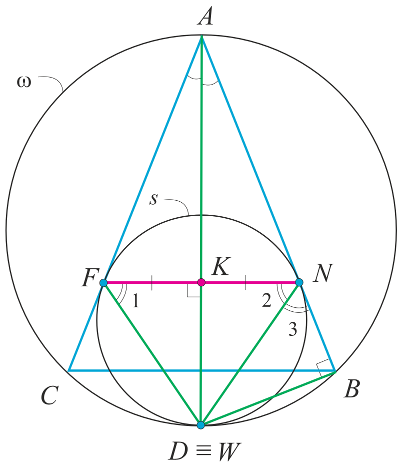


рис.7

Задача 7. *Еще один отрезок «куриной лапки».*

Точка *K* – середина дуги *BAC* описанной окружности треугольника *ABC*. Перпендикуляр из точки *K* к стороне *AC (AC>AB)* пересекает эту окружность в точке *P*. Докажите, что отрезок *AP* равен «куриной лапке», то есть *AP = IW (рис.8)*.

Решение.

Так как *KW* – диаметр окружности (*K* и *W* – середины дуг, составляющих окружность, то $\angle KPW = 90°$ (вписанный, опирающийся на диаметр)). Тогда $PW \parallel AC$ (они перпендикулярны *KP*). Следовательно, *APWC* – равнобокая трапеция. А значит, *AP = CW = IW*.

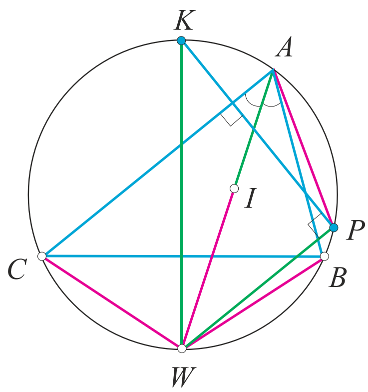


рис.8

Задача 8. *И еще!*

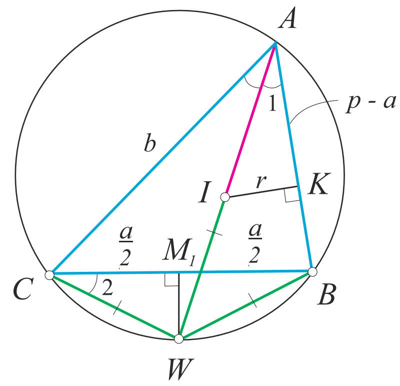


рис.9

В треугольнике *ABC (b > a > c)* между сторонами выполняется равенство: $b-a=a-c$, или $\boxed{2a=b+c}$ (такой треугольник называется разностным). Докажите, что $AI = IW$.

Решение.

Проведем из *I* и *W* перпендикуляры *IK* и WM_1 к *AB* и *BC* соответственно *(рис.9)*. Известно, что *AK = p – a (покажите!)*.

Поскольку $p-a=\dfrac{b+c-a}{2}=\dfrac{2a-a}{2}=\dfrac{a}{2}$. Очевидно, $CM_1=BM_1=\dfrac{a}{2}$ (ΔBWC – равнобедренный). $\angle 1=\angle 2$ – вписанные, опираются на одну дугу *BW*. Тогда $\Delta AIK=\Delta CWM_1$ – по катету и острому углу. А значит, $AI = CW$ – снова отрезок «куриной лапки».

Задача 9.

AH_1 – высота в треугольнике *ABC*, M_1 – середина стороны *BC*. Докажите, что луч M_1I отсекает на AH_1, отрезок *AQ*, равный радиусу вписанной в ΔABC окружности.

Решение.

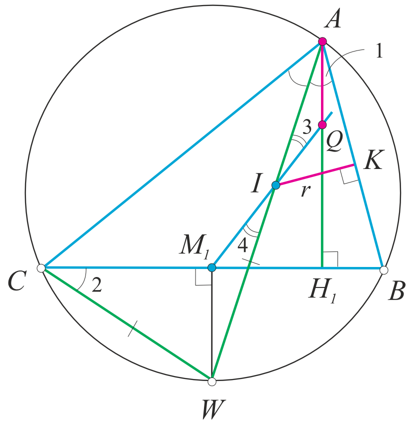


рис.10

Вновь проведем $IK \perp AB$, при этом *IK = r* – радиусу вписанной в ΔABC окружности *(рис.10)*. Поскольку $\angle 1=\angle 2$ (вписанные, опираются на одну дугу *BW*), то прямоугольные треугольники *AIK* и CWM_1 подобны. Значит, $\dfrac{AI}{CW}=\dfrac{IK}{WM_1}$. С учетом того, что *CW = IW* *(«куриная лапка»)* и *IK = r*, получаем: $\dfrac{AI}{IW}=\dfrac{r}{WM_1}$ (1).

Треугольники *AIQ* и WIM_1 также подобны ($\angle 3=\angle 4$ – вертикальные и $\angle IAQ=\angle IWM_1$ – так как $AH_1 \parallel WM_1$). Из этого подобия следует:

$\dfrac{AI}{IW}=\dfrac{AQ}{WM_1}$ (2).

Сравнив (1) и (2), получаем: *AQ = r*.

Задача 10.

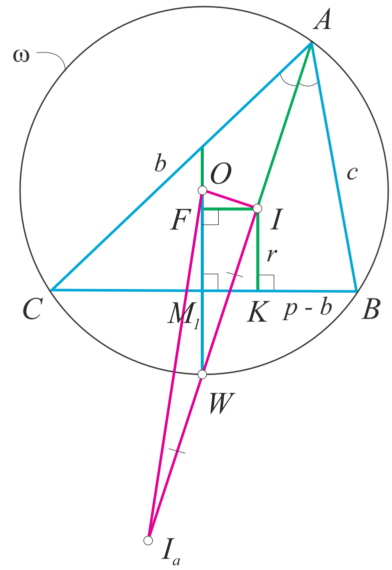


рис.11

Площадь треугольника OII_a вычисляется по формуле: $S_{OII_a}=\dfrac{1}{2}R(b-c)$, где *R* – радиус окружности *ω*, описанной около треугольника *ABC*. Докажите!

Решение.

Рассмотрим ΔOII_a. В нем *OW* – медиана (согласно «куриной лапке» $IW = WI_a$). Медиана делит площадь треугольника пополам, поэтому $S_{OII_a}=2S_{OIW}$. Проведем $IF \perp OW$ *(рис.11)*. Тогда $S_{OIW}=\dfrac{1}{2}OW\cdot IF$.

Проведем также OM_1 и $IK = r$ перпендикулярно *BC*. Очевидно,

$IF = KM_1$. Так как $BM_1 = \frac{a}{2}$ и $BK = p - b$, то $KM_1 = \frac{a}{2} - (p - b) = \frac{b-c}{2} = IF$. Следовательно,

$S_{OIW} = \frac{1}{2} OW \cdot IF = \frac{1}{2} R \cdot \frac{b-c}{2} = \frac{1}{4} R(b-c)$. Тогда $S_{OII_a} = 2S_{OIW} = \frac{1}{2} R(b-c)$.

Замечу, Друзья мои, что хорошая пригоршня задач на «куриную лапку» заготовлена у меня для самостоятельного решения. Вот они!..

Задача 11. Постройте треугольник *ABC* по вершине *A*, центру *O* его описанной окружности и центру *I* вписанной в него окружности *(A; O; I)*.

Задача 12. Восстановите треугольник *ABC* по точкам I; I_a и прямой, содержащей сторону *BC* этого треугольника.

Задача 13. Точка *F* – середина отрезка *BI* в треугольнике *ABC*. Луч *WF* пересекает *AB* в точке *N*. Докажите, что $NI \parallel BC$.

Задача 14. В остроугольном треугольнике *ABC* точка *H* – ортоцентр. Известно, что *IW* = *HW*. Найдите величину угла *A*. (Ответ. $60°$)

Задача 15. В равнобедренном треугольнике *ABC (AB = AC)* ортоцентр *H* лежит на вписанной в этот треугольник окружности. Найдите косинус угла при основании. (Ответ. $\frac{2}{3}$)

Задача 16. Докажите справедливость формулы для треугольника *ABC*: $\boxed{AI \cdot II_a = 4Rr}$.

Задача 17. Точка *M* – центроид, точка пересечения медиан в треугольнике *ABC*. Известно, что $MI \perp BC$. Докажите, что в этом треугольнике $\boxed{b + c = 3a}$.

Задача 18. Точка *K* внутри треугольника *ABC* такая, что $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$ *(рис.12)*. Докажите, что $AK \geq AI$. Когда выполняется знак равенства?

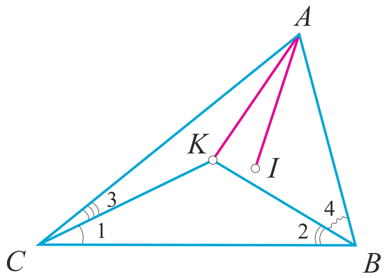


рис.12

Задача 19. Докажите формулу Эйлера для вневписанной окружности: $\boxed{OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a}$, где r_a – радиус вневписанной окружности, касающейся стороны *BC* и продолжений двух других сторон.

Задача 20. Прямая *OI*, проходящая через центры описанной и вписанной окружностей треугольника *ABC*, составляет с высотой AH_1 угол, равный $\frac{A}{2}$. Найдите величину угла *C* в треугольнике *ABC*.

(Ответ. $60°$)

Мемуары Барона

записывал Г.Филипповский