О серединах высот треугольника

Задачи, связанные с серединами высот треугольника, нередко встречаются в олимпиадных сборниках. Их можно встретить также на математических регатах, боях, турнирах. Коллекция таких задач собрана с целью показать их разнообразие, красоту, наличие определенных закономерностей и взаимосвязей между ними.

Задача 1.
Середина высоты принадлежит соответствующей средней линии. Докажите!

Доказательство.
Пусть K – середина высоты AH_1 в треугольнике ABC. M_2M_3 – средняя линия в этом треугольнике, параллельная стороне BC *(рис.1)*. Поскольку треугольники AM_2M_3 и ACB подобны с коэффициентом подобия $1:2$ и $AK:AH_1=1:2$, то, очевидно, $K\in M_2M_3$.

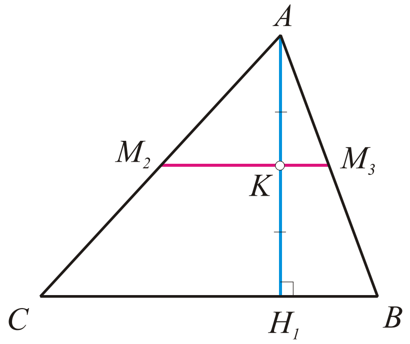

рис.1

Задача 2.
Определите вид треугольника, в котором середины трех высот лежат на одной прямой.

Решение.
Не трудно показать, что в этом случае середины трех высот должны лежать на одной средней линии, что возможно только в прямоугольном треугольнике, когда середины катетов AC и AB *(рис.2)* совпадают с серединами высот. Таким образом, треугольник ABC – прямоугольный.

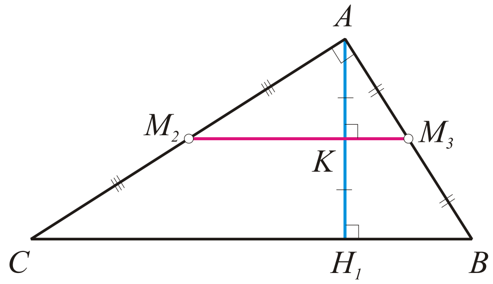

рис.2

Задача 3.
Могут ли две высоты треугольника, пересекаясь, делиться пополам?

Решение.
Пусть ортоцентр H (точка пересечения высот) делит каждую из высот AH_1 и BH_2 пополам *(рис.3)* Тогда ABH_1H_2 – параллелограмм (его диагонали точкой пересечения делятся пополам). В таком случае $AH_2 \parallel BH_1$. Но они пересекаются в вершине C. Противоречие!

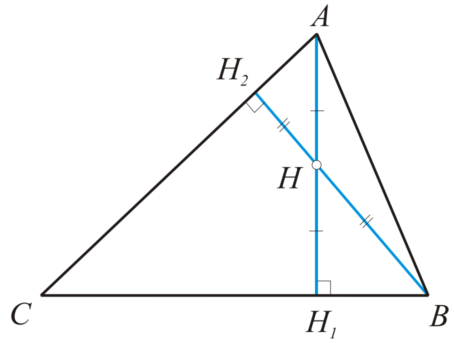

рис.3

Задача 4.
Ортоцентр H равнобедренного треугольника ABC $(AB = AC)$ делит высоту AH_1 пополам. Определите величину угла A.

Решение.
Проведем высоту CH_3 в треугольнике ABC и $H_1D \parallel CH_3$ *(рис.4)*. Так как $CH_1 = H_1B$, то и $H_3D = DB$ – по теореме

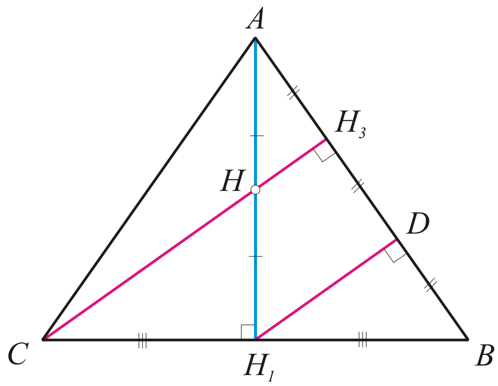

рис.4

Фалеса. Но и $AH = HH_1$ *(по условию)*. Тогда $AH_3 = H_3D$ и $AB = 3AH_3 = AC$. Из треугольника ACH_3 : $\cos A = \dfrac{AH_3}{AC} = \dfrac{1}{3}$. $A = \arccos\dfrac{1}{3}$.

Задача 5.

В треугольник ABC вписан квадрат $DEGL$ с центром в точке Q. AH_1 – высота в треугольнике ABC, M_1 – середина BC. Докажите, что луч M_1Q проходит через середину AH_1.

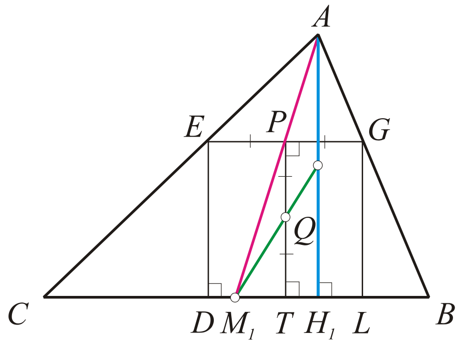

рис.5

Доказательство.

Проведем через Q отрезок $PT \parallel ED$, концы которого лежат соответственно на сторонах EG и DL, а также медиану AM_1 в треугольнике ABC *(рис.5)*. Очевидно, $PQ = QT$ и AM_1 проходит через точку $P\,(EG \parallel BC)$. Тогда, поскольку луч M_1Q делит PT пополам, то он разделит пополам и высоту AH_1 (AH_1TP – трапеция).

Задача 6.

$AH_1; BH_2; CH_3$ – высоты остроугольного треугольника ABC, пересекающиеся в ортоцентре H. F и N – соответственно середины BH_2 и CH_3. M_1 – середина стороны BC. Докажите, что точки H; H_1; M_1; N; F лежат на одной окружности *(рис.6)*.

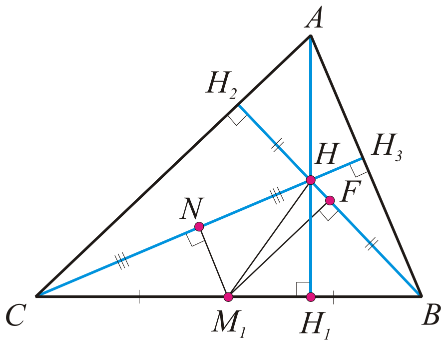

рис.6

Доказательство.

M_1N – средняя линия в ΔCH_3B и $M_1N \perp CH_3$. M_1F – средняя линия в ΔCH_2B и $M_1F \perp BH_2$. Тогда M_1H – диаметр окружности, описанной около треугольников HH_1M_1; HNM_1; HFM_1. А это и означает, что все 5 указанных точек принадлежат одной окружности.

Задача 7.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_1; BH_2; CH_3. Точки K; F; N – середины AH_1; BH_2; CH_3 соответственно. Пусть $x = \angle FH_1N$; $y = \angle NH_2K$; $z = \angle KH_3F$. Найдите сумму углов $x + y + z$ *(рис.7)*.

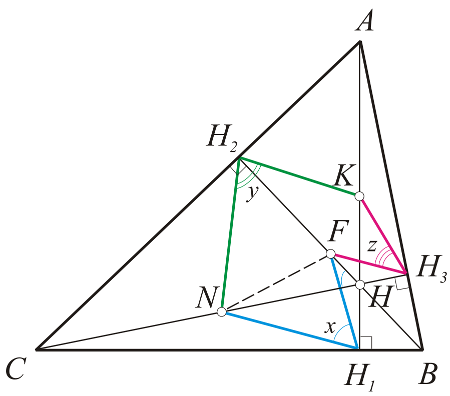

рис.7

Решение.

Как было показано в *задаче 6*, точки H; H_1; N; F лежат на одной окружности (назовем ее ω). $\angle BHC = \angle H_2HH_3 = 180° - A$ (точки A; H_2; H; H_3 лежат на одной окружности с диаметром AH). Тогда смежный с углом BHC угол NHF равен A. Но $\angle NHF = \angle NH_1F = x$ – вписанные, опираются на одну дугу в окружности ω. Следовательно, $x = A$. Аналогично можно показать, что $y = B$, $z = C$. Тогда $x + y + z = A + B + C = 180°$.

Задача 8.

В треугольник ABC вписана окружность s с центром I. Вневписанная окружность ω касается стороны BC в точке T_1, а также продолжений сторон AC и AB. Докажите, что T_1I делит высоту AH_1 треугольника ABC пополам.

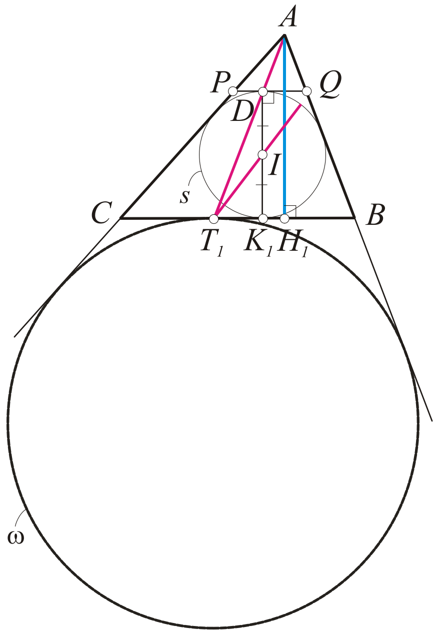

рис.8

Доказательство.

Пусть окружность s касается стороны BC в точке K_1. Проведем K_1D – диаметр окружности s – и в точке D – касательную к s. Пусть эта касательная пересекает AC и AB в точках P и Q соответственно *(рис.8)*. Окружность s является вневписанной для ΔAPQ. Тогда гомотетия с центром в вершине A переводит P в C, Q в B и D в T_1. То есть, точки A; D; T_1 лежат на одной прямой. Поскольку T_1I делит DK_1 пополам ($DI = IK_1 = r$), то луч T_1I делит и высоту AH_1 пополам (ADK_1H_1 – трапеция).

Задача 9.

I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон. Докажите, что I_aK_1 делит высоту AH_1 пополам (K_1 – точка касания вписанной в ΔABC окружности со стороной BC).

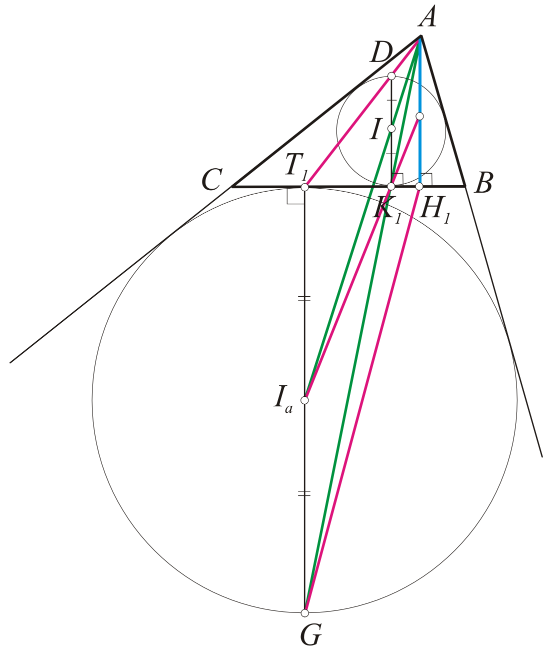

рис.9

Доказательство.

Как уже было показано в *задаче 8* при гомотетии с центром в вершине A точка D переходит в T_1. Очевидно, в этом случае точка I переходит в I_a и K_1 переходит в G *(рис.9)*. Рассмотрим трапецию AH_1GT_1. Ее диагонали H_1T_1 и AG пересекаются в точке K_1. I_a – середина основания T_1G. Тогда, по свойству трапеции, прямая I_aK_1 проходит через середину основания AH_1. А это и требовалось доказать!..

Задача 10.

BH_2 – высота в равнобедренном треугольнике ABC $(AB = AC)$. Прямые, проведенные через A параллельно BC и через B перпендикулярно AB, пересекаются в точке Q. Докажите, что CQ делит высоту BH_2 пополам.

Решение.

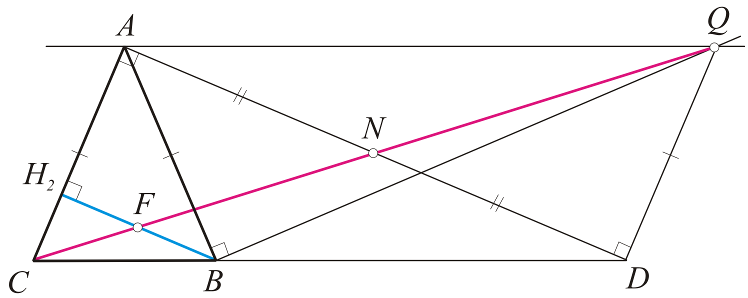

рис.10

Проведем через Q луч параллельно AC. Пусть он пересекает прямую BC в точке D *(рис.10)*. Очевидно, $ACDQ$ – параллелограмм и $ABDQ$ – равнобокая трапеция ($DQ = AC = AB$). Тогда $\angle ADQ = \angle ABQ = 90°$ и $AD = BQ$. Пусть также N – точка пересечения диагоналей AD и CQ

параллелограмма $ACDQ$, а F – точка пересечения QC и BH_2. Поскольку $\angle DAC = \angle QDA = 90°$, то $DA \parallel BH_2$. Следовательно, AH_2BD – трапеция и, так как $AN = ND$, то $BF = FH_2$.

Задача 11.

Прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами его соответственных высот пересекаются в одной точке. Докажите!

Доказательство.

Пусть K, F, N – середины высот AH_1, BH_2, CH_3 соответственно. Середины сторон BC, AC и AB – соответственно точки M_1; M_2; M_3. Докажем, что M_1K, M_2F и M_3N пересекаются в одной точке – точке Q *(рис.11)*. Поскольку точки K, F, N лежат на сторонах треугольника $M_1M_2M_3$, то для решения задачи необходимо выполнить требование обратной теоремы Чевы: $\frac{M_2K}{KM_3} \cdot \frac{M_3F}{FM_1} \cdot \frac{M_1N}{NM_2} = 1$ *(1)*. Очевидно, $\frac{M_2K}{KM_3} = \frac{CH_1}{H_1B}$; $\frac{M_3F}{FM_1} = \frac{AH_2}{H_2C}$; $\frac{M_1N}{NM_2} = \frac{BH_3}{H_3A}$. Тогда равенство *(1)* равносильно такому: $\frac{CH_1}{H_1B} \cdot \frac{BH_3}{H_3A} \cdot \frac{AH_2}{H_2C} = 1$ *(2)*. Равенство *(2)* верно, так как высоты треугольника пересекаются в ортоцентре H. Следовательно, верно и равенство *(1)*, то есть M_1K, M_2F и M_3N пресекаются в одной точке.

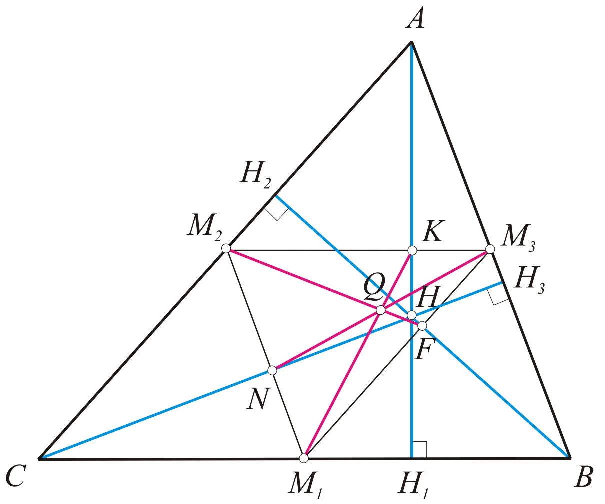

рис.11

Замечание. Указанные отрезки пересекаются в *точке Лемуана* – точке пересечения симедиан треугольника ABC. Однако это заслуживает отдельного разговора, выходящего за рамки статьи.

Задача 12.

AL и BP – биссектрисы в треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Точка Q – середина AL, а точка E на AL такова, что BP делит угол QBE пополам. Докажите, что луч M_1E (M_1 – середина BC) делит высоту AH_1 пополам.

Доказательство.

Пусть $\angle QBP = \angle PBE$ ($\angle 1 = \angle 2$) и K – точка пересечения луча M_1E с высотой AH_1 *(рис.12)*. Покажем, что K – середина высоты AH_1. По свойству биссектрисы AL треугольника ABC $\frac{c}{b} = \frac{BL}{a - BL}$, откуда $BL = \frac{ac}{b+c}$.

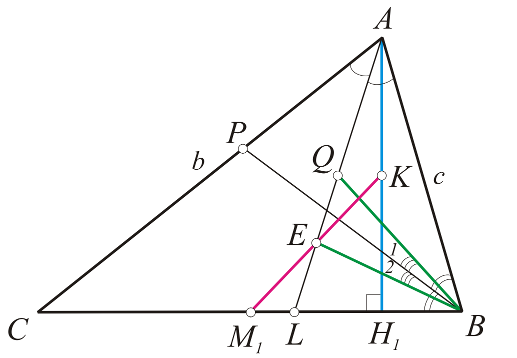

рис.12

Пусть также $b > c$. Известно, что $M_1H_1 = \frac{b^2 - c^2}{2a}$ *(покажите!)*.

$$M_1L = M_1B - BL = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}.$$

Применим теорему Менелая для треугольника AH_1L и прямой $M_1 - E - K$:

$$\frac{AE}{EL}\cdot\frac{LM_1}{M_1H_1}\cdot\frac{H_1K}{KA}=1 \quad (1)$$

Заметим, что BE – симедиана в треугольнике ABL (прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы). По свойству симедианы $\frac{AE}{EL}=\frac{AB^2}{BL^2}$ *(покажите!)*. Согласно равенству *(1)* получаем:

$$\frac{c^2}{\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2}\cdot\frac{\frac{a(b-c)}{2(b+c)}}{\frac{b^2-c^2}{2a}}\cdot\frac{H_1K}{KA}=1,\text{ или }\frac{c^2\cdot(b+c)^2}{a^2\cdot c^2}\cdot\frac{a(b-c)\cdot 2a}{2(b+c)(b-c)(b+c)}\cdot\frac{H_1K}{KA}=1$$ или, после сокращений, $\frac{H_1K}{KA}=1$. Следовательно, $AK=KH_1$ и точка K – середина высоты AH_1.

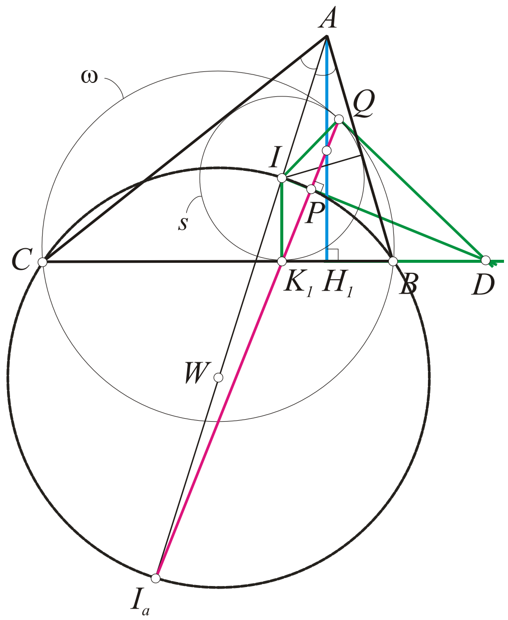

рис.13

Задача 13.

В треугольник ABC вписана окружность s с центром в точке I. Окружность ω проходит через вершины B и C и касается s в точке Q. Докажите, что K_1Q (K_1 – точка касания s со стороной BC) делит высоту AH_1 пополам.

Доказательство.

Проведем через Q общую касательную к окружностям ω и s, которая пересекает продолжение BC в точке D *(рис.13)*. По теореме о квадрате касательной для окружности ω:

$DQ^2=DC\cdot DB$ *(1)*.

Поскольку $IQ\perp QD$ и $IK_1\perp CD$, то $\Delta IQD=\Delta IK_1D$ *(по катету и гипотенузе)*. Очевидно, что в таком случае $ID\perp QK_1$. Пусть ID и QK_1 пересекаются в точке P. Значит, K_1P – высота, проведенная из вершины прямого угла в ΔIK_1D. Тогда $DK_1^2=DI\cdot DP$ *(2)*. Однако $DQ = DK_1$ – касательные, проведенные из одной точки. Из равенств *(1)* и *(2)* получаем: $DC\cdot DB=DI\cdot DP$. Это означает, что точки B, P, I, C принадлежат одной окружности. Так как центр окружности, описанной около ΔBIC – точка W пересечения продолжения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью ΔABC ($WB = WI = WC$ –*лемма о трезубце*), то именно точка W является центром описанной окружности четырехугольника $BPIC$. Тогда отрезок II_a – диаметр этой окружности ($IW = WI_a$ – согласно *теореме Мансиона*).

Поскольку $\angle IPK_1=90°$, то точки $P; K_1; I_a$ лежат на одной прямой. А значит, все четыре точки: $Q; P; K_1; I$ принадлежат одной прямой. Но I_aK_1 делит высоту AH_1 пополам *(задача 9)*. Следовательно, и K_1Q делит высоту AH_1 пополам!..

Задача 14. *(А.Г.Мякишев)*

В треугольник ABC вписана окружность s, отмечены ее центр I и точка K_1 касания со стороной BC. Одной линейкой постройте точку Q, в которой окружность ω, проходящая через вершины B и C, касается (внутренним образом) вписанной окружности.

Решение.

Проведем K_1D – диаметр окружности s *(рис.14)*. Зная отрезок с его серединой ($DI = IK_1$), можно одной линейкой через любую точку провести прямую параллельно $D-I-K_1$ *(покажите!)*. Тогда проведем прямую $AH_1 \parallel DK_1$, где AH_1 – высота в ΔABC. Так как ADK_1H_1 – трапеция, то, воспользовавшись свойством трапеции (точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой), разделим AH_1 пополам (точка K). Тогда луч K_1K пересечет окружность s в искомой точке Q, что следует из *задачи 13*.

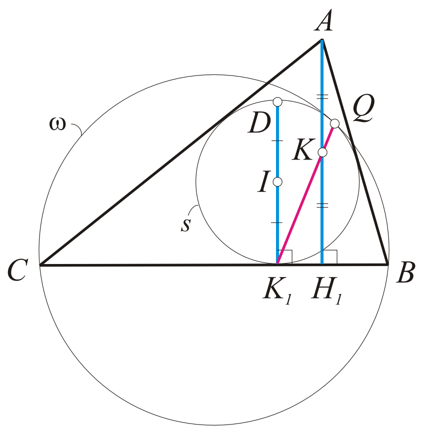

рис.14

Задача 15. *(П.Кожевников)*

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_1, BH_2, CH_3. Точка K – середина высоты AH_1. BB_1 и CC_1 – перпендикуляры к отрезкам H_1H_3 и H_1H_2 соответственно. Докажите, что треугольники B_1KH_3 и H_2KC_1 равны.

Решение.

Поскольку для ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ высоты AH_1; BH_2; CH_3 являются внутренними биссектрисами, а стороны треугольника ABC – внешними биссектрисами, то вершины A, B, C – центры вневписанных окружностей треугольника $H_1H_2H_3$. Поэтому сделаем более наглядный рисунок к задаче *(рис.15)*.

Пусть также $H_2H_3 = a$; $H_1H_3 = b$; $H_1H_2 = c$ и $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр $\Delta H_1H_2H_3$. Очевидно, $H_1E = H_1G = p$. Проведем из точки K – середины AH_1 – перпендикуляры KF и KN к сторонам H_1H_3 и H_1H_2 соответственно. Так как (с учетом условия) точки B_1 и C_1 – точки касания вневписанных окружностей со сторонами H_1H_3 и H_1H_2, то $H_1B_1 = p - c$ и $H_1C_1 = p - b$. Тогда $B_1H_3 = b-(p-c) = p-a$ и $C_1H_2 = c-(p-b) = p-a$, то есть $B_1H_3 = C_1H_2$. Заметим, что $H_1F = H_1N = \dfrac{p}{2}$. Значит,

$H_1F + H_1N = p$ (1).

Но и $H_1H_3 + H_1C_1 = b + p - b = p$, или $H_1F + FH_3 + H_1N - NC_1 = p$ (2).

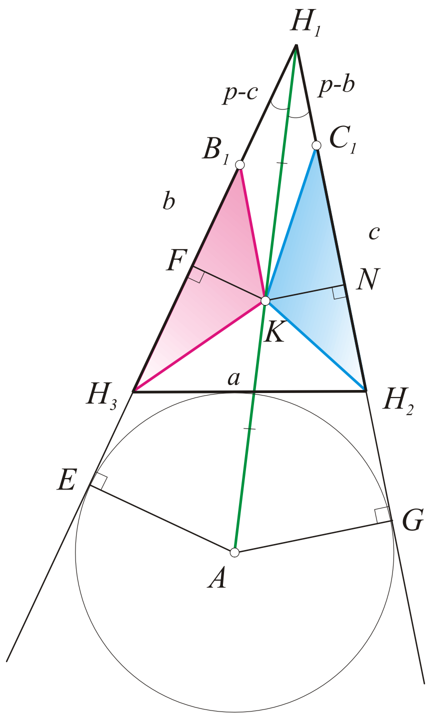

рис.15

Из равенств (1) и (2) получаем: $H_3F = NC_1$. Тогда треугольники KFH_3 и KNC_1 равны по двум катетам и $KH_3 = KC_1$. Аналогично покажем, что $KH_2 = KB_1$. Тогда треугольники B_1KH_3 и H_2KC_1 равны – по трем сторонам.

Несколько задач на предложенную тему – для самостоятельного решения.

Задача 16. AH_1 и BH_2 – высоты в треугольнике ABC пересекающиеся в ортоцентре H, причем $AH = HH_1$. Известно, что $AH_1 = h$. Найдите $BH \cdot HH_2$.

Ответ. $\frac{h^2}{4}$.

Задача 17. В треугольнике *ABC* выполняется равенство $\cos A = \cos B \cdot \cos C$. Докажите, что ортоцентр *H* делит высоту AH_1 пополам.

Указание. Воспользуйтесь формулами $AH = 2R\cos A$, $BH = 2R\cos B$.

Задача 18. В прямоугольном треугольнике *ABC* ($C = 90^o$) проведена высота CH_3. Точка *E* – середина AH_3. *BP* – перпендикуляр к *CE*. Докажите, что *BP* делит высоту CH_3 пополам.

Идея. Три высоты в треугольнике *BCE* пересекаются в одной точке.

Задача 19. Ортоцентр *H* треугольника *ABC* делит высоту AH_1 пополам, а высоту CH_3 – в отношении 2:1 ($CH:HH_3$ = 2:1). Найдите величину угла *B*.

Ответ. 45^o.

Задача 20. Касательные к описанной окружности треугольника *ABC* в точках *A* и *B* пересекаются в точке *T*. А касательные в *A* и *C* – в точке *Q*. *CT* и *BQ* пересекаются в точке *P*. Докажите, что M_1P делит высоту AH_1 пополам (M_1 – середина *BC*).

Указание. Докажите, что *P* – точка Лемуана (точка пересечения симедиан треугольника *ABC*).

Задача 21. *(А.Г.Мякишев)* Точки *K; F; N* – середины высот AH_1; BH_2; CH_3 соответственно в треугольнике *ABC*. Через *K* проведена прямая параллельно *AO* (*O* – центр описанной окружности треугольника *ABC*). Через *F* – прямая параллельно *BO* и через *N* – прямая параллельно *CO*. Докажите, что все три прямые пересекаются в одной точке.

Указание. Покажите, что 6 точек – проекции оснований каждой из высот треугольника *ABC* на две другие его стороны – лежат на одной окружности (*окружности Тейлора*). Докажите, что указанные прямые пересекаются в центре окружности Тейлора.

Автор выражает благодарность А.А.Заславскому, П.А.Кожевникову, Д.В.Прокопенко за ценные советы по содержанию статьи.

Г. Филипповский,

г.Киев