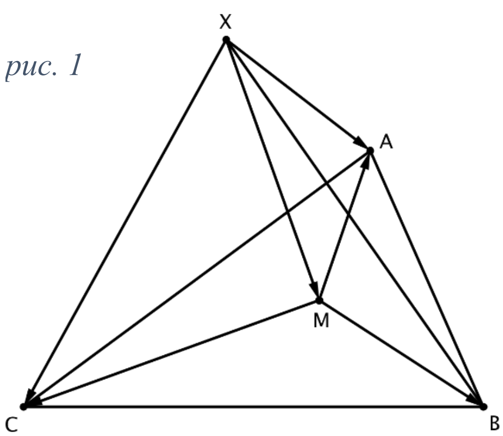
Старые и новые встречи с теоремой Лейбница

Круг интересов замечательного немецкого ученого Г.В.Лейбница (1646-1716) был необычайно широк: юриспруденция и историография, философия и библиотечное дело, алхимия и астрология, астрономия и математика. Не случайно Норберт Винер написал о нём: “После Лейбница, быть может, уже не было человека, который бы полностью охватил всю интеллектуальную жизнь своего времени.”

Математикой Лейбниц стал заниматься довольно поздно, в 26 лет. Как он сам шутливо говорил, “зашёл в математику с чёрного хода”. Тем не менее, заслуги Лейбница в этой области знаний чрезвычайно велики! Это и создание (одновременно с Ньютоном, независимо друг от друга) интегрального и дифференциального исчисления. Это ряд Лейбница для числа π, и арифмометр Лейбница, и элементы двоичной системы исчисления, и “Рассуждения о комбинаторном искусстве”, и работа с комплексными числами, и многое другое. Лейбниц ввёл в математику термины: “функция”, “дифференциал”, “бесконечно малые”, “абсцисса”, “ордината”, “координаты” …

Что касается вклада Лейбница в геометрию, то тут следует сказать о теореме, которая носит его имя. Теорема Лейбница — важная, полезная, красивая теорема! О её широком, эффективном применении мы и поведём дальнейший разговор. Некоторые из представленных ниже задач имеют солидный возраст, высокий рейтинг участия в математических олимпиадах, турнирах. Другие задачи — совсем юные, новые. Впрочем, они стараются не уступать своим старым собратьям ни по уровню сложности ни по эмоциям! Отсюда и название статьи: “Старые и новые встречи с теоремой Лейбница”.

рис. 1



Теорема Лейбница. Расстояния от любой точки X плоскости (а вообще говоря и пространства) до вершин треугольника ABC и до его центроида M связаны соотношением:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2$$

Среди нескольких доказательств теоремы Лейбница наиболее простым и изящным представляется векторное. Приведём его.

Доказательство. Согласно “правилу треугольника” сложения векторов имеем:

$$\overline{XA} = \overline{XM} + \overline{MA}$$

$$\overline{XB} = \overline{XM} + \overline{MB}$$

$$\overline{XC} = \overline{XM} + \overline{MC} \text{ (рис. 1)}$$

Возведём обе части каждого равенства в квадрат и сложим их:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2 + \overline{2XM}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})$$

С учётом известного векторного соотношения $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$ получим требуемое:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2$$

Следствия из теоремы Лейбница:

1) Геометрическим местом точек плоскости, сумма квадратов расстояний от которых до всех вершин треугольника постоянна, есть окружность с центром в центроиде M треугольника ΔABC.
2) Сумма квадратов расстояний от точки X до вершин треугольника будет наименьшей, когда $X \equiv M$ (действительно, в этом случае слагаемое $3XM^2 = 0$).

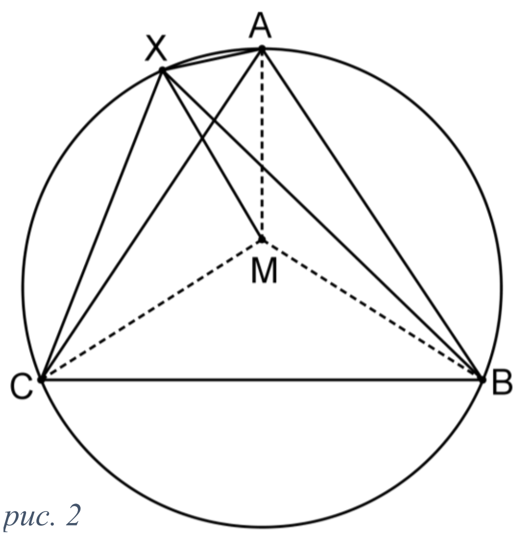


рис. 2

Задача 1. Определите вид ΔABC, если для любой точки описанной около него окружности

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = const$$

Решение. Согласно теореме Лейбница

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2$$

Поскольку отрезки MA; MB; MC составляют каждый $\frac{2}{3}$ соответствующий медианы (рис. 2), то

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = const$$

Тогда должно быть постоянным и расстояние XM от любой точки X описанной окружности ΔABC до его центроида. Это возможно, когда $M \equiv O$, где O — центр описанной окружности ΔABC. В таком случае ΔABC является равносторонним.

Задача 2. Вычислите минимальное значение суммы $XA^2 + XB^2 + XC^2$, если стороны ΔABC равны a, b, c.

Решение. Для данного случая $X \equiv M$ (смотрите следствие 2 из теоремы Лейбница). Таким образом,

$$(XA^2 + XB^2 + XC^2)_{min} = MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

Поскольку сумма квадратов медиан треугольника составляет $\frac{3}{4}$ суммы квадратов всех его сторон (известный факт), то

$$(XA^2 + XB^2 + XC^2)_{min} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Задача 3. Найдите углы ΔABC, в котором $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2$

Решение. Пусть точка X совпадает с точкой O - центром описанной окружности ΔABC. Тогда по теореме Лейбница

$OA^2 + OB^2 + OC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2$, или

$3R^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2$

Учитывая условие, получаем $OM = 0$. Это возможно только в равностороннем треугольнике. Итак, все углы ΔABC равны по 60°.

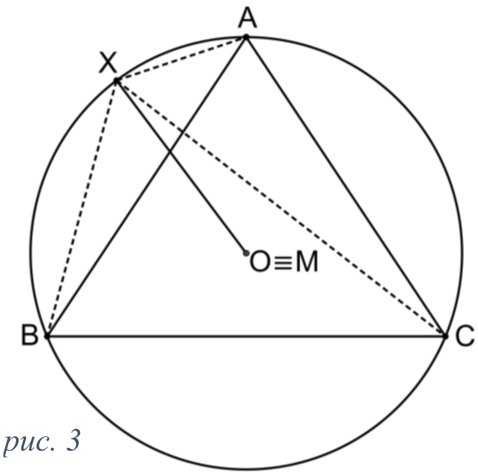


рис. 3

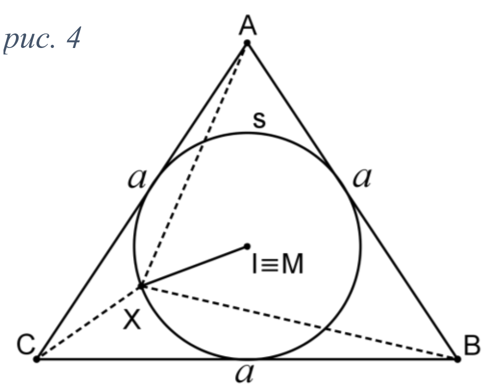
Задача 4. Около равностороннего треугольника ABC описана окружность радиуса R. Докажите, что для любой точки этой окружности сумма квадратов её расстояний до вершин треугольника ABC постоянна. Найдите значение этой суммы.

Решение. Пусть X — произвольная точка окружности ω, описанной около равностороннего ABC (рис. 3). Поскольку центр окружности ω — точка $O -$ совпадает с центроидом M (ΔABC - равносторонний), то по теореме Лейбница

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3OX^2 =$$
$$= 3R^2 + 3R^2 = 6R^2 = const$$

Задача 5. В равносторонний ΔABC со стороной a вписана окружность. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки этой окружности до вершин треугольника ABC.

рис. 4



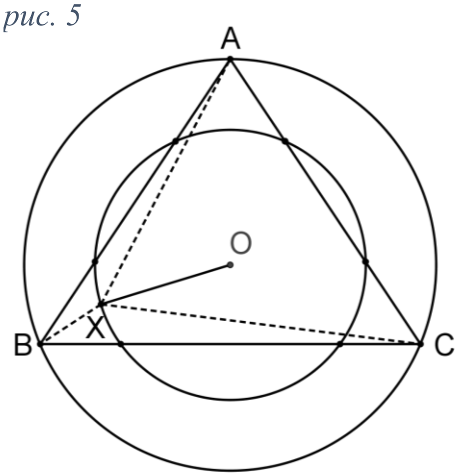
Решение. Пусть окружность s с центром I вписана в равносторонний ΔABC со стороной a (рис. 4). Очевидно, $I \equiv M$ (M - центроид в ΔABC). Тогда, согласно теореме Лейбница, для произвольной точки X окружности s имеем:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2$$
$$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3r^2$$

где r - радиус окружности s. Так как в равностороннем треугольнике $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ (покажите!), то

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = a^2 + 3\frac{a^2}{12} = \frac{5a^2}{4}$$

рис. 5

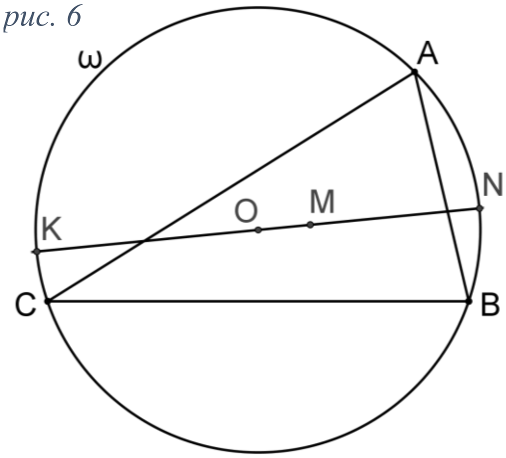


Задача 6. Окружность делит каждую сторону равностороннего треугольника ΔABC на три равные части. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки этой окружности до вершин треугольника есть величина постоянная.

Доказательство. Пусть X — произвольная точка данной окружности. Опишем окружность около ΔABC (рис. 5). Обозначим радиусы большей и меньшей окружностей соответственно через R_1 и R_2. Нетрудно показать, что центры окружностей совпадают с центром треугольника. Поскольку $O \equiv M$ (M — центроид в ΔABC), то по теореме Лейбница

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3OX^2 = 3{R_1}^2 + 3{R_2}^2 = const$$

рис. 6



Задача 7. Дан ΔABC с центроидом M. Около него описана окружность ω с центром в точке O. Постройте на окружности точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин ΔABC, а) минимальна; б) максимальна.

Решение. Проведем прямую OM, совпадающую с диаметром окружности ω. Пусть эта прямая пересекает ω в точках K и N (рис. 6). Тогда MN - наименьшее расстояние от центроида M до ω, а MK - наибольшее (докажите это, воспользовавшись неравенством треугольника). Так как

$$NA^2 + NB^2 + NC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3NM^2,$$

а также $KA^2 + KB^2 + KC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3KM^2$, то очевидно, первая сумма будет минимальной, а вторая — максимальной. Таким образом, N и K — искомые точки.

Задача 8. Найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин данного треугольника ABC минимальна, если эта точка находится:

а) на высоте AH_1 треугольника ABC;

б) на данной прямой q;

в) на стороне BC;

г) на контуре треугольника ABC.

Решение. Поскольку во всех случаях сумма $MA^2 + MB^2 + MC^2$ постоянна, то в каждом отдельном случае необходимо искать кратчайшее расстояние от центроида M до

а) высоты AH_1;

б) прямой q;

в) стороны BC;

г) сторон треугольника ABC.

На рис. 7 (а-г) искомыми точками соответственно являются D; F; K; N. Заметим, что MN - наименьшее из расстояний от центроида M до сторон треугольника ΔABC (рис. 7, г)

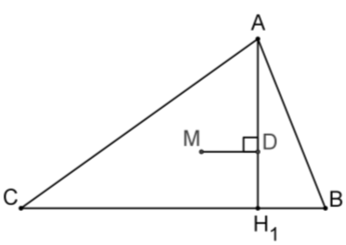


рис. 7а

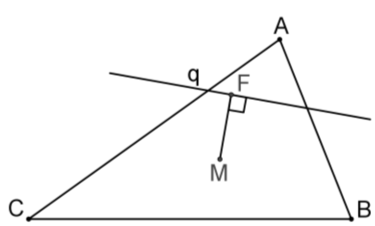


рис. 7б

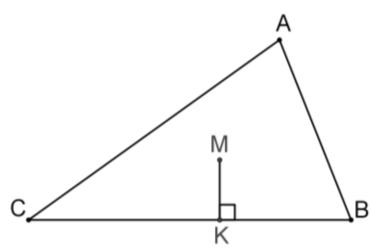


рис. 7в

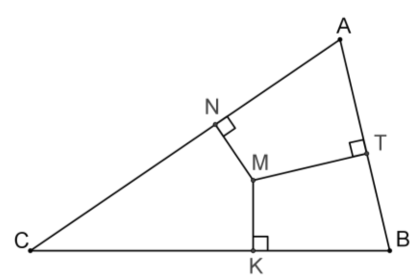


рис. 7г

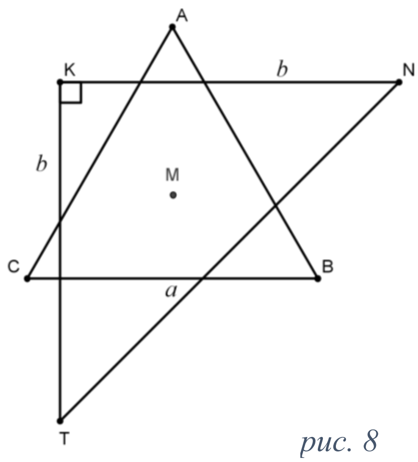


рис. 8

Задача 9. Два треугольника - правильный ΔABC со стороной a, а также равнобедренный прямоугольный ΔKNT с катетами b - расположены так, что их центроиды совпадают. Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин одного из треугольников до всех вершин другого.

Решение. Итак, $AB = BC = AC = a$; $KN = KT = b$ и $NT = b\sqrt{2}$ (рис. 8). Найдём сумму квадратов расстояний от точки A до вершин ΔKNT. Согласно теореме Лейбница

$$AK^2 + AN^2 + AT^2 = MK^2 + MN^2 + MT^2 + 3AM^2,$$

где $MK^2 + MN^2 + MT^2 = \frac{1}{3}(b^2 + b^2 + 2b^2) = \frac{4}{3}b^2$(<u>задача 2</u>)

$AM = \frac{a}{\sqrt{3}}$ — как радиус описанной около ABC окружности.

Тогда $AK^2 + AN^2 + AT^2 = \frac{4}{3}b^2 + 3\frac{a^2}{3} = \frac{4}{3}b^2 + a^2$

Аналогично

$BK^2 + BN^2 + BT^2 = \frac{4}{3}b^2 + a^2$ и

$CK^2 + CN^2 + CT^2 = \frac{4}{3}b^2 + a^2$

Следовательно, искомая сумма равна $4b^2 + 3a^2$

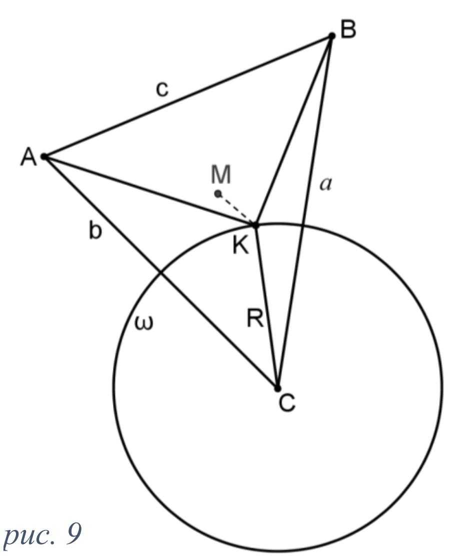


рис. 9

Задача 10. Дана окружность ω с центром C и две точки A и B — вне окружности. Найти на окружности точку K такую, чтобы $KA^2 + KB^2 = t^2$, где t — заданный отрезок.

Решение. Пусть задача решена. Соединим тогда точки друг с другом. Пусть также $BC = a$; $AC = b$ и $AB = c$ — известные отрезки. Нетрудно также найти центроид M в ΔABC (провести в нём 2 медианы). Воспользуемся теоремой Лейбница:

$$KA^2 + KB^2 + KC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3KM^2$$

Но $KA^2 + KB^2 = t^2$ (по условию); $KC^2 = R^2$ и $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$. Следовательно, имеем:

$$t^2 + R^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3KM^2$$

Пусть $t^2 + R^2 = n^2$, а $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = q^2$.

Тогда $KM^2 = \frac{n^2 - q^2}{3}$ и $KM = \sqrt{\frac{n^2 - q^2}{3}}$

Такой отрезок легко строится. После чего из точки M раствором циркуля, равным MK, делаем засечку на окружности.

Задача 11. Стороны ΔABC равны a, b, c. Найти расстояние OM между центром описанной окружности ΔABC и его центроидом.

Решение. Пусть X≡O. Тогда

$OA^2 + OB^2 + OC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2$, или

$3R^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3OM^2$ откуда $OM = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$, где $R = \frac{abc}{4S}$, а площадь S можно найти по формуле Герона.

Замечание. Поскольку точки O, M и H (ортоцентр ΔABC) лежат на одной прямой (прямой Эйлера) и $2OM = MH$, то $MH = \frac{2}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$ и $OH = \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$.

Задача 12. Из всех треугольников, вписанных в данный круг, равносторонний имеет наибольшую сумму квадратов сторон. Докажите!

Доказательство. Согласно задаче 11 $OM = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$. Очевидно,

$(a^2 + b^2 + c^2)_{max} = 9R^2$ и тогда $OM = 0$, что достигается в равностороннем треугольнике.

Задача 13. Пусть H — ортоцентр ΔABC. Докажите справедливость формулы:

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

Доказательство. По теореме Лейбница

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3HM^2$$

Так как $MH^2 = \frac{4}{9}(9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2))$ - см. примечание к задаче 11, то

$HA^2 + HB^2 + HC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \cdot \frac{4}{9}(9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2))$, откуда получим требуемое: $HA^2 + HB^2 + HC^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

Следствие. Поскольку $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ — см. замечание к задаче 11, то

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 = 3R^2 + OH^2$$

Задача 14. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

Доказательство. Подкоренное выражение в формуле задачи 11

$OM = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$ должно быть неотрицательным, откуда $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$.

Задача 15. Докажите справедливость неравенства для углов ΔABC:

$$sin^2 A + sin^2 B + sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

Доказательство. По теореме синусов для ΔABC: $\frac{a}{sin\,A} = 2R$, отсюда $sin\,A = \frac{a}{2R}$. Аналогично $sin\,B = \frac{b}{2R}$ и $sin\,C = \frac{c}{2R}$. Тогда $sin^2 A + sin^2 B + sin^2 C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$. С учетом неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ (задача 14), получим: $sin^2 A + sin^2 B + sin^2 C \leq \frac{9}{4}$

Задача 16. Докажите, что для медиан ΔABC выполняется неравенство:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \le \frac{27R^2}{4}$$

Доказательство. Известно, что $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ (покажите!), тогда

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \le \frac{3}{4} \cdot 9R^2 = \frac{27R^2}{4}$$

Задача 17. Докажите справедливость неравенства для любой точки X в плоскости ΔABC: $XA^2 + XB^2 + XC^2 \ge \frac{4}{9}p^2$, где p — полупериметр ΔABC.

Доказательство. Согласно теореме Лейбница

$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2$, или

$XA^2 + XB^2 + XC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3XM^2$, или

$XA^2 + XB^2 + XC^2 \ge \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Нетрудно показать, что $3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a + b + c)^2$. Действительно, это неравенство сводится к знаменитому "неравенству трёх квадратов": $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$

Тогда тем более $XA^2 + XB^2 + XC^2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{9} = \frac{4}{9}p^2$

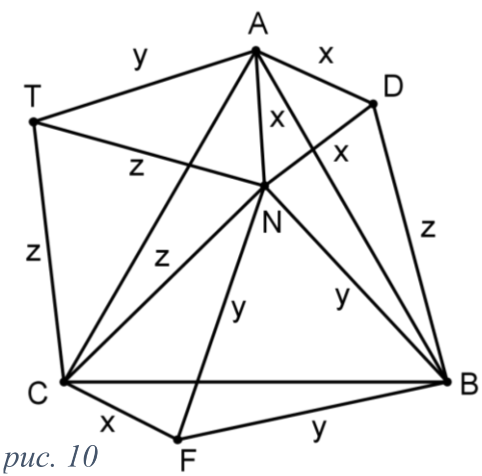


рис. 10

Задача 18. Внутри равностороннего ΔABC площади S взята произвольная точка N. Докажите, что площадь треугольника со сторонами NA; NB; NC не превышает $\frac{1}{3}S$.

Доказательство. Пусть $NA = x$; $NB = y$; $NC = z$. Повернём ΔACN на 60° против часовой стрелки вокруг точки A — получим ΔADB (рис. 10). При этом ΔADN — равносторонний треугольник со стороной x. А стороны ΔNDB равны x; y; z. Повернём ΔBAN вокруг точки B на 60° против часовой стрелки — получим ΔBCF. И при этом ΔBNF - равносторонний со стороной y. А у ΔCFN стороны равны x; y; z. После поворота ΔCBN на 60° против часовой стрелки вокруг точки C получим равносторонний ΔCNT со стороной z и ΔANT со сторонами x; y; z. Очевидно, площадь шестиугольника $TADBFC$ равна $2S$ (снаружи ΔABC оказались такие же площадки, что и внутри него). В то же время шестиугольник $TADBFC$ состоит из трёх равносторонних треугольников соответственно со сторонами x; y; z. А также из трёх равных треугольников ΔNDB; ΔCFN; ΔNAT. У этих треугольников стороны равны x; y; z. Пусть площадь каждого из них равна S_1. И необходимо показать, что $S_1 \le \frac{1}{3}S$. Поскольку сумма площадей всех шести треугольников равна $2S$, или $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{y^2\sqrt{3}}{4} + \frac{z^2\sqrt{3}}{4} + 3S_1 = 2S$, то остаётся показать, что $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{y^2\sqrt{3}}{4} + \frac{z^2\sqrt{3}}{4} \ge S$. Тогда очевидно, что $3S_1 \le S$ и $S_1 \le \frac{1}{3}S$.

Покажем, что $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{y^2\sqrt{3}}{4}+\frac{z^2\sqrt{3}}{4}\geq\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона ΔABC, или (что тоже самое) покажем, что $x^2+y^2+z^2\geq a^2$. По теореме Лейбница для ΔABC имеем:

$NA^2+NB^2+NC^2=MA^2+MB^2+MC^2+3NM^2$, где M≡O в равностороннем ΔABC. Или $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}(a^2+a^2+a^2)+3NO^2$

$x^2+y^2+z^2=a^2+3NO^2\geq a^2$ Тогда $3S_1$ (сумма площадей треугольников ΔNBD; ΔCFN; ΔNAT) не превышает площади ΔABC, или $S_1\leq\frac{1}{3}S$.

Задача 19. Докажите, что в условиях предыдущей задачи справедлива формула:

$S_1=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2-3d^2)$, где $NO=d$.

Доказательство. В задаче 18 было показано, что $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{y^2\sqrt{3}}{4}+\frac{z^2\sqrt{3}}{4}+3S_1=2S$, или $\frac{\sqrt{3}}{4}(NA^2+NB^2+NC^2)+3S_1=2S$. Кроме того, по т. Лейбница было получено: $NA^2+NB^2+NC^2=a^2+3NO^2=a^2+3d^2$. Тогда имеем: $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+3d^2)+3S_1=2S$. Следовательно, $3S_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{3d^2\sqrt{3}}{4}$, откуда $S_1=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2-3d^2)$.

Замечание. Если только N находится в плоскости ΔABC, но вне треугольника, то полученная формула примет вид: $S_1=\frac{\sqrt{3}}{12}|a^2-3d^2|$

Отметим что планиметрическая теорема имеет свой аналог в стереометрии.

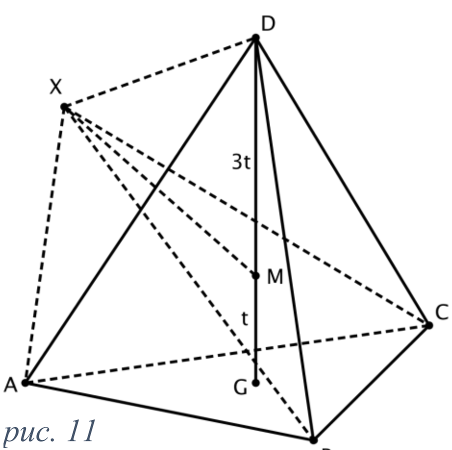


рис. 11

Задача 20. Пусть медианы тетраэдра $DABC$ (отрезки соединяющие вершины с центроидами противоположенных граней) пересекаются в точке M. Тогда для любой точки X пространства справедливо соотношение:

$$XA^2+XB^2+XC^2+XD^2 = MA^2+MB^2+MC^2+MD^2+4XM^2$$

Указание. Доказательство аналогично доказательству теоремы Лейбница в планиметрии с помощью векторов. С учётом того факта, что медианы тетраэдра также пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3: 1, считая от вершины. Например, $DM: MG=3:1$ (рис. 11)

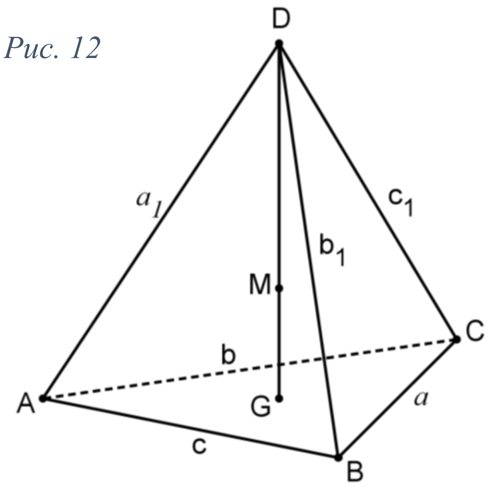
Задача 21. Найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до всех вершин данной треугольной пирамиды минимальна.

Доказательство. Согласно соотношению задачи 20 нетрудно видеть, что

$(XA^2+XB^2+XC^2+XD^2)_{min}$ — в случае, когда X≡M. То есть, требуемая сумма приобретает минимум в точке пересечения медиан данной треугольной пирамиды.

Задача 22. Сумма квадратов трёх ребер тетраэдра, принадлежащих одной грани, меньше утроенной суммы квадратов трёх других его ребер. Докажите!

Рис. 12



Доказательство. Пусть в тетраэдре $DABC$ скрещивающиеся рёбра равны: a и a_1 (BC и DA соответственно); b и b_1 (AC и DB); c и c_1 (AB и DC). Пусть также M — точка пересечения медиан тетраэдра $DABC$, а G — центроид грани ABC (рис. 12). Нетрудно показать, что $\overline{DG} = \frac{1}{3}(\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC})$ или $\overline{DG} = \frac{1}{3}(\overline{a_1} + \overline{b_1} + \overline{c_1})$. После возведения последнего векторного равенства в квадрат и применения теоремы косинусов получим: $DG^2 = \frac{1}{9}(3{a_1}^2 + 3{b_1}^2 + 3{c_1}^2 - a^2 - b^2 - c^2)$. Так как $DM = \frac{3}{4}DG$, то

$DM^2 = \frac{9}{16}DG^2 = \frac{1}{16}(3{a_1}^2 + 3{b_1}^2 + 3{c_1}^2 - a^2 - b^2 - c^2)$. Применив аналогичные формулы к AM^2; BM^2; CM^2 после сложения всех четырех равенств находим:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \frac{1}{4}({a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2 + a^2 + b^2 + c^2).$$

Согласно теореме стереометрической Лейбница (задача 20):

$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 \geq MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

Пусть X≡D. Тогда имеем: $DA^2 + DB^2 + DC^2 \geq MA^2 + MB^2 + +MC^2 + MD^2$, или

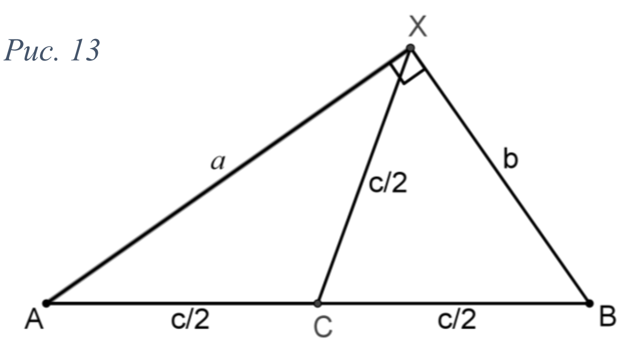
${a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2 = \frac{1}{4}({a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2 + a^2 + b^2 + c^2)$, или

$\frac{3}{4}({a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2) \geq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$, или $(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3({a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2)$. Поскольку $X \equiv D$ и не совпадает с M, то неравенство является строгим:

$(a^2 + b^2 + c^2) < 3({a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2)$

Перед тем как перейти к задачам для самостоятельного решения, предложим авторское доказательство теоремы Пифагора.

Рис. 13



Задача 23. Докажите справедливость теоремы Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Доказательство. Пусть точка X совпадает с вершиной прямого угла, а точка C — с серединой отрезка AB. В этом случае ΔABC — вырожденный и его центроид M совпадает с точкой C (рис. 13). Пусть также $XA = a$; $XB = b$; $AB = c$ и $AC = BC = XC = \frac{c}{2}$. Тогда для данного случая теорема Лейбница запишется следующим образом:

$XA^2 + XB^2 + XC^2 = CA^2 + CB^2 + CC^2 + 3XC^2$, или $a^2 + b^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} + 0 + 3\frac{c^2}{4}$, откуда $a^2 + b^2 = c^2$. Теорема Пифагора доказана.

Теорема Лейбница в задачах для самостоятельного решения.

Задача 24. ΔABC и ΔKNT имеют общий центроид M. Докажите, что сумма квадратов расстояний всех вершин одного треугольника до всех вершин другого не зависит от расположения этих треугольников на плоскости.

Задача 25. Пусть E — центр окружности Эйлера в треугольнике ΔABC. Докажите, что $EA^2 + EB^2 + EC^2 = \frac{1}{4}(3R^2 + a^2 + b^2 + c^2)$.

Задача 26. Докажите, что расстояние MI между центроидом и инцентром треугольника ABC вычисляется по формуле: $MI = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)}$, где r — радиус окружности, вписанной в ΔABC; p — полупериметр ΔABC.

Задача 27. Дан ΔABC площади S, все углы которого меньше $120°$. Найдите расстояние от точки T Торричелли треугольника ABC до центроида M этого треугольника.

Ответ. $TM = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 2S\sqrt{3}}$

Задача 28. Сумма квадратов расстояний от произвольной точки сферы до вершин вписанного в окружность её большого круга правильного треугольника есть величина постоянная. Докажите!

Задача 29. Сумма квадратов расстояний от произвольной точки внутри тетраэдра (или на его поверхности) до всех вершин тетраэдра не меньше четверти суммы квадратов всех его рёбер. Докажите!

Г. Филипповский,
Ф. Бобылев.

Русановский лицей,
г. Киев.