Точка *E* – центр окружности Эйлера – в задачах Олимпиад

Прежде, чем приступить к задачам, в которых точа *E* играет важную роль, давайте отметим основные свойства окружности Эйлера и ее центра точки *E*. Окружность Эйлера проходит через 9 точек. Отметим их:

- основания высот H_1; H_2; H_3;

- середины сторон M_1; M_2; M_3;

- середины отрезков *AH*; *BH*; *CH* – точки E_1; E_2; E_3, где *H* – ортоцентр треугольника *ABC* *(рис.1)*.

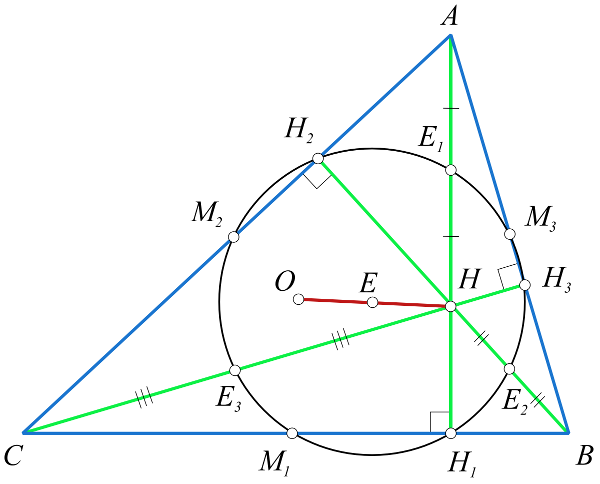

рис.1

Радиус окружности Эйлера равен $\frac{R}{2}$ (*R* – радиус описанной окружности треугольника *ABC*). Окружность Эйлера касается внутренним образом вписанной в треугольник *ABC* окружности, а также внешним образом трех вневписанных окружностей *(теорема Фейербаха)*. Ее центр – точка *E* – лежит на прямой Эйлера (прямой *O – M – H*, где *O* – центр описанной окружности; *M* – центроид треугольника *ABC*), причем *E – середина отрезка OH*. Поскольку точки *O, M, H* расположены на прямой Эйлера так, что 2*OM* = *MH*, то *OM* = *2ME* и *EH* = 3*ME*.

Перейдем к задачам, в которых важную роль играет точка *E*.

Задача 1.

AH_1 – высота в остроугольном треугольнике *ABC*. Луч *AO* пересекает сторону *BC* в точке *F*. Пусть *P* – середина отрезка *AF*. Докажите, что прямая H_1P проходит через точку *E*.

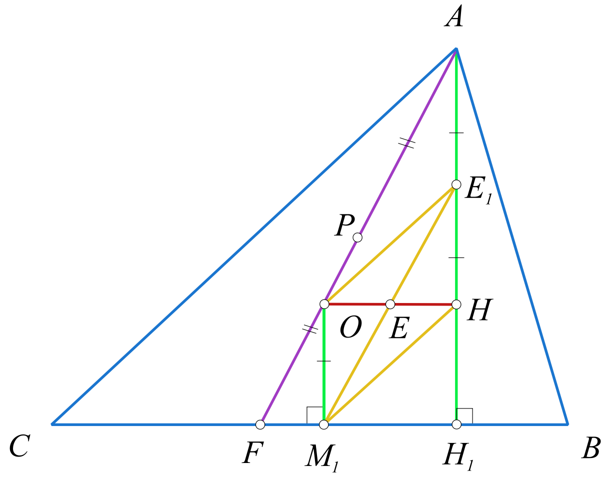

рис.2

Доказательство.

Проведем $OM_1 \perp BC$. Поскольку $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ (известный факт геометрии треугольника), то AOM_1E_1 и E_1OM_1H – параллелограммы и $AE_1 = E_1H$ – *рис.2*. В таком случае *OH* и E_1M_1 пересекаются в точке *E* и делятся ею пополам.

Тогда, так как AE_1M_1F – трапеция, а *P* и *E* – середины ее оснований, то, согласно лемме о трапеции, точки *P*, *E*, H_1 лежат на одной прямой (H_1 – точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции).

Задача 2.

В треугольнике *ABC* проведены прямая Эйлера *q* и серединный перпендикуляр *n* к стороне *BC*. Проведя не более двух линий, постройте точку *E* – центр окружности Эйлера треугольника *ABC*.

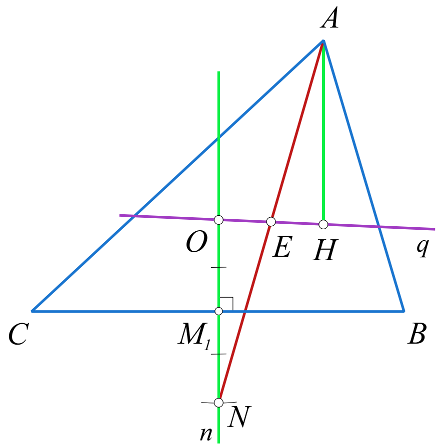

рис.3

Решение.

Очевидно, прямые *q* и *n* пересекаются в точке *O* – центре описанной окружности ΔABC. Анализ показывает, что если удвоить OM_1 за точку M_1, то четырехугольник *AONH* будет параллелограммом, так как $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ *(рис.3)*. Отсюда необходимое построение: <u>1ая линия</u> – засечка на прямой *n* из точки M_1 радиусом OM_1 дает точку *N*; <u>2ая линия</u> – *AN* пересекает прямую Эйлера *q* в искомой точке *E*.

Задача 3.

Дан острый угол *C* и точка *E* внутри него. Постройте на сторонах угла точки *A* и *B* такие, чтобы точка *E* была центром окружности Эйлера в треугольнике *ABC*.

Решение.

Пусть такой ΔABC построен. Точки $M_1; M_2; M_3$ – соответственно середины сторон BC, AC и AB, а точка E – центр окружности Эйлера (*рис.4*). Тогда $\angle M_2M_3M_1 = C$ ($CM_2M_3M_1$ – параллелограмм), а $\angle M_1EM_2 = 2C$ – центральный угол в окружности Эйлера. Так как $EM_1 = EM_2$ – радиусы окружности Эйлера, то анализ показывает, что при повороте прямой BC на угол $2C$ по часовой стрелке относительно E точка M_1 перейдет в M_2. И наоборот, при повороте прямой AC на угол $2C$ против часовой стрелки относительно E точка M_2 перейдет в M_1.

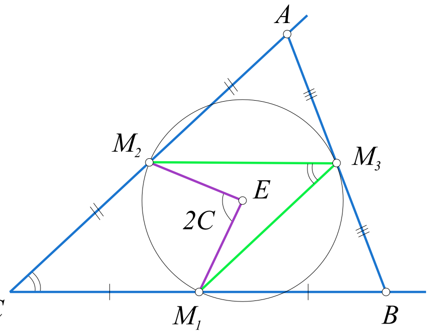

рис.4

Остается выполнить указанные операции: повернем нижнюю сторону угла на угол $2C$ против часовой стрелки – в пересечении с верхней стороной получим точку M_2. Удвоив CM_2, получим вершину A. Теперь повернем прямую AC на угол $2C$ против часовой стрелки относительно E и получим точку M_1. Удвоим CM_1 и найдем недостающую вершину B.

Задача 4.

Постройте треугольник ABC по его инцентру I, точке касания K вписанной в этот треугольник окружности со стороной BC, а также точке E.

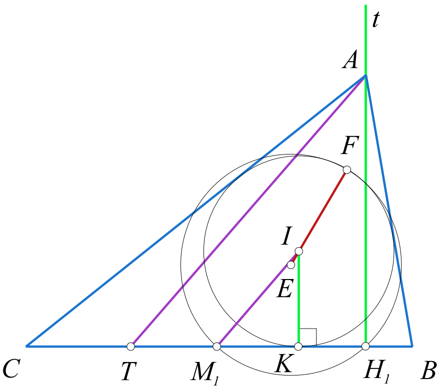

рис.5

Решение.

Соединим I и K и через точку K проведем прямую перпендикулярно IK – она содержит сторону BC.

Построим вписанную в треугольник ABC окружность с центром в точке I радиуса IK (*рис.5*).

EI пересекает эту окружность в точке F внутреннего касания окружности Эйлера и вписанной окружности (точку F называют точкой *Фейербаха*). Окружность *Эйлера* $(E; EF)$ пересекает прямую BC в точках M_1 (середине BC) и H_1 (основании высоты, проведенной из вершины A).

Через H_1 проведем прямую t параллельно IK. Она содержит высоту AH_1. Отложим на прямой BC отрезок $M_1T = M_1K$ (поскольку $CT = BK = p - b$) и через T проведем прямую параллельно M_1I. Она пересекает прямую t в вершине A ($TA \parallel M_1I$ – *покажите!*).

Наконец, проведем из вершины A касательные к вписанной в треугольник ABC окружности.

Они при продолжении дадут вершины B и C.

Задача 5.

Точки $M_1; M_2; M_3$ – середины сторон треугольника ABC. $BP \perp M_1M_3$ и $CQ \perp M_1M_2$ (*рис.6*). Точку E соединили с M_1. Докажите, что EM_1 делит отрезок PQ пополам.

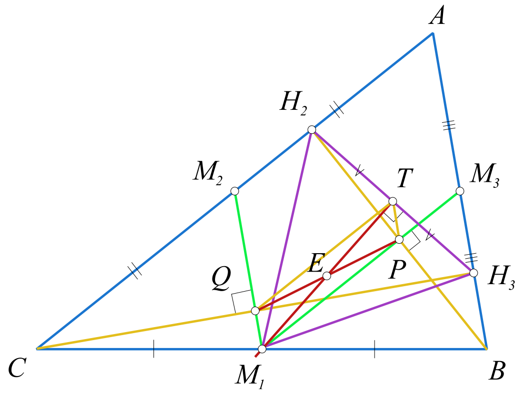

рис.6

Доказательство.

Очевидно, лучи BP и CQ пересекут AC и AB в основаниях высот треугольника ABC – точках H_2 и H_3 соответственно ($M_1M_3 \parallel AC$ и $M_1M_2 \parallel AB$).

Обозначим через T середину отрезка H_2H_3. Так как $H_2M_1 = H_3M_1 = \frac{1}{2}BC$, то TM_1 – серединный перпендикуляр к хорде H_2H_3 в окружности Эйлера, то есть, точки $T; E; M_1$ лежат на одной прямой. TQ – средняя линия в ΔCH_2H_3 и TP – средняя линия в ΔBH_3H_2. Тогда $TQ \parallel AC$ и $TP \parallel AB$, а значит, TQM_1P – параллелограмм. Диагональ $T - E - M_1$ делит диагональ QP пополам.

Задача 6.

Высота из вершины A остроугольного треугольника ABC при продолжении пересекает описанную около него окружность в точке N. Известно, что $AN = q$. Найдите расстояние от точки E до стороны BC.

Решение.

Известно, что точки, симметричные ортоцентру H относительно сторон треугольника, лежат на его описанной окружности: $HH_1 = H_1N$ (*рис.7*). Пусть $HH_1 = H_1N = x$. Пусть также $AH = 2y$, тогда $OM_1 = y$ $(OM_1 = \frac{1}{2}AH)$. Поскольку, точка E – середина OH, то EF – средняя линия в трапеции OM_1H_1H. Следовательно, $EF = \frac{x+y}{2}$. Но $AN = 2x + 2y = q$. Значит, $EF = \frac{1}{4}q$.

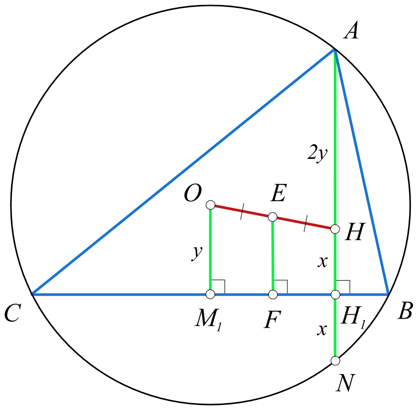

рис.7

Задача 7.

Из ортоцентра H остроугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр HK к биссектрисе AL_1. Докажите, что луч M_1K проходит через точку E – центр окружности Эйлера.

Доказательство.

Соединим точку K с E_1 – серединой AH (*рис.8*). Тогда KE_1 – медиана, проведенная к гипотенузе в треугольнике AKH, то есть $KE_1 = AE_1 = E_1H$. Пусть $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$, $\angle KE_1H = 2\alpha$ – внешний для ΔAE_1K. Известно, что что биссектриса угла A треугольника ABC является также биссектрисой угла OAH – *покажите!* Таким образом, $\angle 3 = \angle 1 = \alpha$ и $\angle OAH = 2\alpha$.Следовательно, $OA \parallel KE_1$. Но также $OA \parallel M_1E_1$ (AOM_1E_1 – параллелограмм). Значит, $M_1 – K – E_1$ – одна прямая. Но M_1E_1 – диаметр окружности Эйлера, то есть M_1K проходит через точку E.

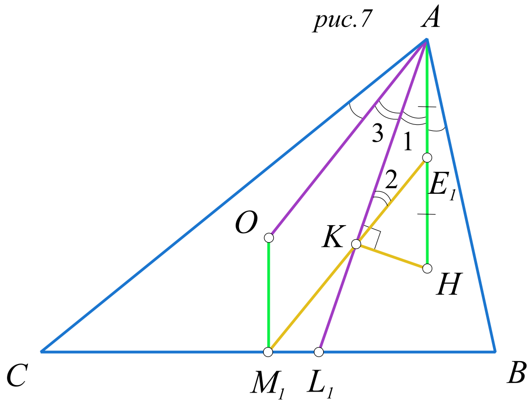

рис.8

Задача 8.

Точка E лежит на биссектрисе AL_1 треугольника ABC. Найдите величину угла A.

Решение.

Биссектриса угла A, как уже было сказано, является также биссектрисой угла OAH. Значит, AE – биссектриса и медиана в ΔAOH, то есть $AH = AO = R$ (*рис.9*). Из ΔCOM_1, где $\angle COM_1 = A$, находим: $OM_1 = R\cdot|\cos A|$ (ΔABC может быть и тупоугольным). Тогда $AH = 2R\cdot|\cos A| = R$, откуда $\cos A = \pm\frac{1}{2}$ и $A = 60°$ или $A = 120°$.

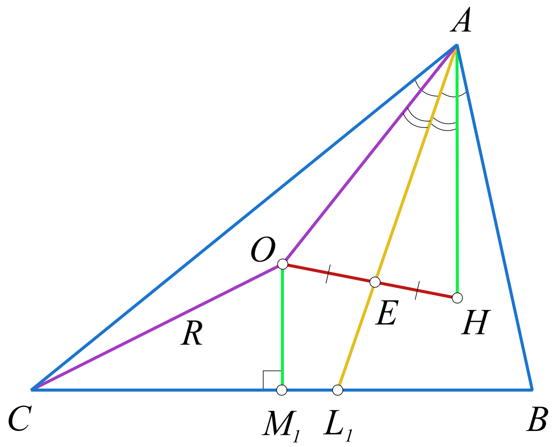

рис.9

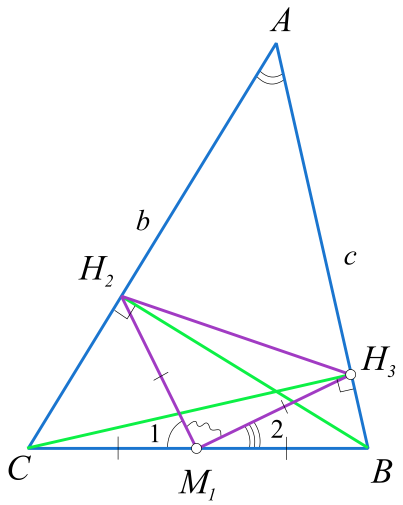

рис.10

Задача 9.

BH_2 и CH_3 – высоты в остроугольном треугольнике ABC. Известно, что прямая H_2H_3 делит его на две равновеликие части. Докажите, что эта прямая проходит через точку E.

Доказательство.

Пусть $AC = b$ и $AB = c$. Тогда $AH_2 = c\cdot\cos A$ (из ΔAH_2B) и $AH_3 = b\cdot\cos A$ (из ΔACH_3) – *рис.10*. Площадь ΔAH_2H_3 равна $\frac{1}{2}S$, и она же равна $\frac{1}{2}AH_2 \cdot AH_3 \cdot \sin A$. Получаем: $\frac{1}{2}bc \cdot \cos^2 A \cdot \sin A = \frac{1}{2}S = \frac{1}{4}bc \cdot \sin A$. Или

$\cos^2 A = \frac{1}{2}$ и $\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ΔABC – очевидно остроугольный и берем только со знаком «+»). Следовательно, $A = 45^o$. Пусть M_1 – середина BC. Тогда $\angle 1 = 180° - 2C$ ($H_2M_1 = CM_1$) и $\angle 2 = 180° - 2B$ ($H_3M_1 = BM_1$). Значит, $\angle H_2M_1H_3 = 180° - (180° - 2B) - (180° - 2C) = 2B + 2C - 180° = 180° - 2A = 90°$ (так как $A = 45^o$).

Раз так, то H_2H_3 – диаметр окружности *Эйлера* и точка E – середина H_2H_3.

Задача 10.

В треугольнике ABC ($b < a < c$) проведена биссектриса AL_1. Оказалось, что точка L_1 совпала с точкой E – центром окружности *Эйлера*. Найдите углы треугольника ABC.

Решение.

Поскольку L_1 – центр окружности *Эйлера*, то L_1 – середина OH. Тогда ΔOAH – равнобедренный (AL_1 – биссектриса $\angle OAH$ и $OL_1 = L_1H$). То есть, $AH = AO = R$. Но $AH = 2R\cdot|\cos A|$. Откуда $\cos A = \frac{1}{2}$ и $A = 60°$ (угол A – не наибольший).

$OM_1 = \frac{1}{2}AH = \frac{R}{2}$. И $L_1M_1 = L_1H_1 = \frac{R}{2}$ (L_1 – центр окружности Эйлера, а M_1 и H_1 – точки на этой окружности). Тогда $M_1H_1 = R = OA$. $AH_1 = OM_1 = \frac{R}{2}$. Получаем квадрат $AODH$, где $OD = 2OM_1$ (*рис.11*), в котором L_1 – точка пересечения диагоналей и $\angle 1 = 45°$. Но $\angle 1 = C + \frac{A}{2} = C + 30°$ (*внешний для* ΔAL_1C). Стало быть, $C = 45^o - 30^o = 15^o$ и $B = 105^o$.

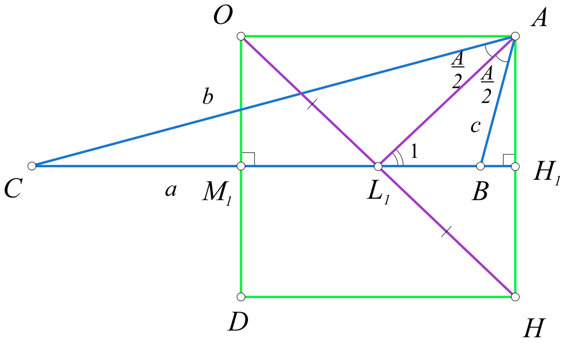

рис.11

Несколько задач, связанных с точкой E, предложим для самостоятельного решения.

Задача 11. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точка D – середина AO. Докажите, что описанная окружность треугольника ADH_1 проходит через точку E.

Задача 12. I_a, I_b, I_c – центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Докажите, что точка O – центр описанной окружности треугольника ABC – является точкой E для треугольника $I_aI_bI_c$.

Задача 13. Точка H – ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что точка E остается точкой E в треугольниках BHC; AHC; AHB.

Задача 14. Прямые Эйлера четырех треугольников: BHC, AHC, AHB, ABC пересекаются в точке E (*теорема Гамильтона*). Докажите.

Задача 15. Постройте треугольник ABC по инцентру I, середине BC – точке M_1, а также точке E.

Задача 16. В треугольнике ABC стороны BC, AC и AB равны a, b, c соответственно. Докажите, что $AE^2 = \frac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4}$.

Задача 17. A_1, B_1, C_1 – точки, симметричные соответственно вершинам A, B, C относительно сторон BC, AC и AB. OA_1 пересекает BC в точке P, OB_1 пересекает AC в точке Q, OC_1 пересекает AB в точке T. Докажите, что AP, BQ и CT пересекаются в точке E.

Задача 18. Треугольник ABC – остроугольный. Точка G – центр описанной окружности треугольника OHH_1. Точка F – симметричный образ точки G относительно E. Докажите, что F лежит на средней линии, параллельной BC.

Задача 19. В треугольнике ABC прямая IO параллельна стороне BC. Докажите, что луч M_1I проходит через E.

Задача 20. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 45°. Докажите, что луч AE является симедианой в треугольнике ABC.

Г.Филипповский