

Про геометричні задачі Льюїса Керролла та їх сучасних “родичів”

Г.Б. Філіпповський¹

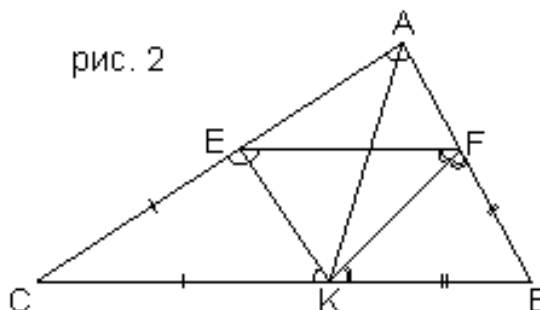
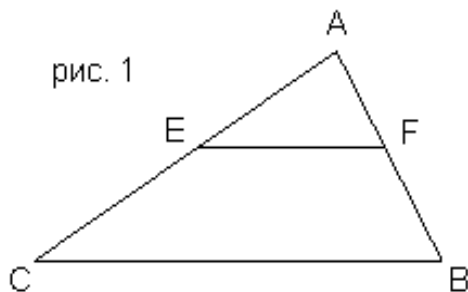
Професор математики та логіки Чарлз Лютвидж Доджсон (1832-1898) став Льюїсом Керроллом у 1865 році. Саме тоді він написав славнозвісну “Алісу в Країні Чудес”. Щоб математичне товариство не вирішило, нібито він збожеволів, професор склав собі цілих два псевдоніми. Ім’я Charles в перекладі на латинь виглядало як “Каролус”. А ім’я Lutwidge було схожим на “Людовікус”. Якщо їх поміняти місцями, то отримаємо “Людовікус Каролус”. Коли це все знов перекласти англійською мовою, то на світ з’явиться письменник Льюїс Керролл!..

Пройшов час, і слава Льюїса Керролла значно перевершила славу професора Доджсона з коледжу Крайст Черч в Оксфорді. Переклади “Аліси в Країні Чудес” та “Аліси в Задзеркаллі” (1871) існують понад 100 років майже на усіх світових мовах. В той же час про математичні праці цього доброго Чаклуна ми дізнаємося лише зараз. І тут на нас знов-таки чекають дивні відкриття.

Геометричні здобутки Доджсона-Керролла належать шкільній геометрії — геометрії Евкліда. Він навіть написав працю “Евклід та його сучасні суперники”, в якій не залишив каменя на камені від міркувань тих, хто без належної поваги ставився до твору Евкліда “Начала”. В своїй іншій праці [1] Льюїс Керролл (будемо саме так його звати) поряд з арифметичними та алгебраїчними задачами склав низку задач з так званої *чистої геометрії*. Серед них — 4 задачі, схожих за своєю конструкцією. Умовно назовемо цю конструкцію “Відрізок EF , паралельний до BC ”. Після розгляду чотирьох задач Керролла (задачі К-1 – К-4) запропонуємо сучасні імпровізації, пов’язані з цією конструкцією. Більшість сучасних задач є олімпіадними задачами різного рівня (від шкільних до Всеукраїнських або Всеросійських). Отже, розпочнемо.

Задачі Льюїса Керролла

Задача К-1. В даному $\triangle ABC$ провести $EF \parallel BC$ в такий спосіб, щоб $BF + CE = BC$ (рис. 1).

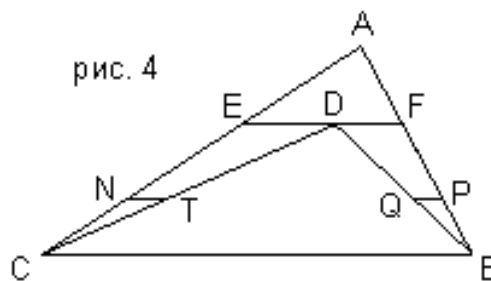
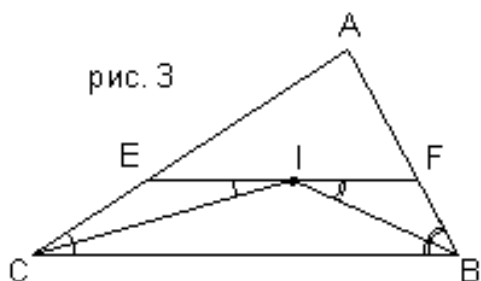


¹Русанівський ліцей, м.Київ.

Розв'язання. Нехай потрібний відрізок EF побудовано. Якщо на BC відкласти $BK = BF$, то, зрозуміло, $CK = CE$ (рис. 2). Оскільки EK і FK є зовнішніми бісектрисами в $\triangle AEF$ (доведіть), то внутрішня бісектриса кута A в цьому трикутнику також проходить через K . Отже, K є основою внутрішньої бісектриси кута A в $\triangle ABC$. Звідси випливає наступна побудова: проведемо бісектрису AK в $\triangle ABC$. На AB відкладемо $BF = BK$, на AC — відрізок $CE = CK$. З'єднавши E та F , отримаємо необхідне.

Задача К-2. В даному $\triangle ABC$ провести $EF \parallel BC$ так, щоб виконувалась рівність $EF = BF + CE$.

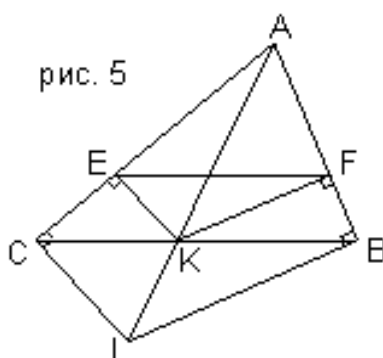
Розв'язання. Неважко показати, що відрізок $EF \parallel BC$ має проходити через інцентр I , тобто точку перетину бісектрис $\triangle ABC$. Справді, в такому випадку $IF = BF$ та $IE = CE$ (рис. 3).



Задача К-3. В даному $\triangle ABC$ побудувати $EF \parallel BC$ так, щоб $2EF = BF + CE$.

Розв'язання. На AB візьмемо довільну точку P і проведемо пряму $PN \parallel BC$. Відкладемо на PN відрізки $PQ = \frac{1}{2}BP$ та $NT = \frac{1}{2}CN$ (рис. 4). Через точку D перетину променів BQ і CT проведемо пряму паралельно до BC . Вона перетне AC і AB в шуканих точках E та F відповідно.

Задача К-4. На основі BC даного $\triangle ABC$ знайдіть таку точку K , щоб відрізок EF був паралельним до BC , де $KE \perp AC$ і $KF \perp AB$.



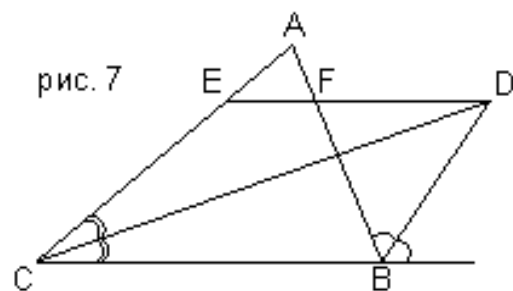
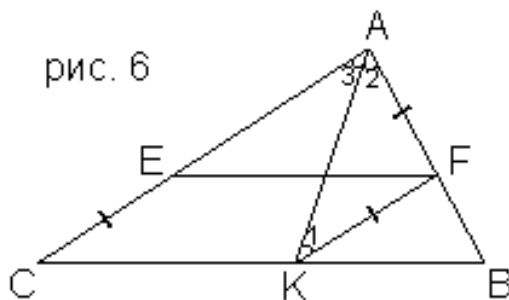
Розв'язання. Через вершини B і C проведемо промені, що відповідно перпендикулярні до AB і AC (рис. 5). Нехай вони перетнуться в точці L . Очевидно, що чотирикутники $ACLB$ та $AEKF$ гомотетичні (A — центр гомотетії). Тоді пряма AL перетне BC в шуканій точці K .

Віriamo, що задачі Льюїса Керролла викликали зацікавленість, прагнення до їх розв'язання і, мабуть, певні труднощі. Невипадково, що вони постійно спонукали математиків до вигадок, знахідок, складання нових задач. І ось що з цього вийшло!..

Сучасні імпровізації з конструкцією “Відрізок EF , паралельний до BC ”

Задача 1. В даному $\triangle ABC$ побудувати $EF \parallel BC$ таким чином, щоб $AF = CE$ (рис. 6).

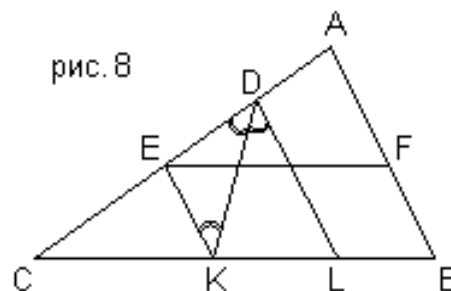
Розв'язання. Аналіз показує: якщо провести $FK \parallel AC$, то $FK = CE = AF$ і $\angle 1 = \angle 2$. Але $\angle 1 = \angle 3$ (як внутрішні різносторонні), тобто $\angle 2 = \angle 3$ і AK співпадає з бісектрисою кута A в $\triangle ABC$. Подальше очевидно.



Задача 2. В даному $\triangle ABC$ ($AC > AB$) побудувати $EF \parallel BC$ таким чином, щоб $EF = CE - BF$.

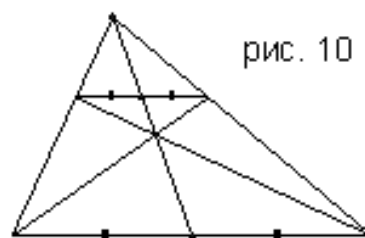
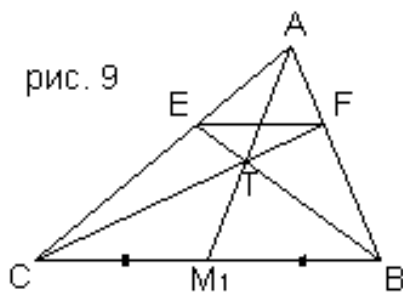
Розв'язання. Нехай зовнішня бісектриса кута B і внутрішня бісектриса кута C перетнуться в точці D (рис. 7). Пряма, яку проведено через D паралельно до BC , перетинає AC і AB у шуканих точках E та F (покажіть самостійно).

Задача 3. В $\triangle ABC$ проведіть $EF \parallel BC$ так, щоб $BF + CE = l$, де l — довжина даного відрізка.



Розв'язання. На AC відкладаємо $CD = l$ і проводимо $DL \parallel AB$ (рис. 8). Бісектриса $\angle CDL$ перетне BC в точці K . Промінь з точки K , паралельний до AB , перетне AC в шуканій точці E . Справді, $KE = DE$ і $KE + CE = l$. Залишається провести $EF \parallel BC$. Оскільки $BF = KE$, то $BF + CE = l$.

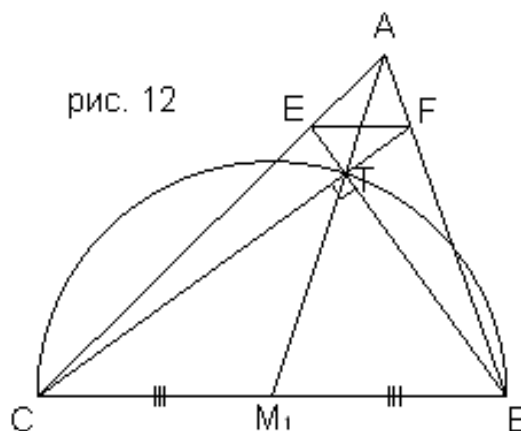
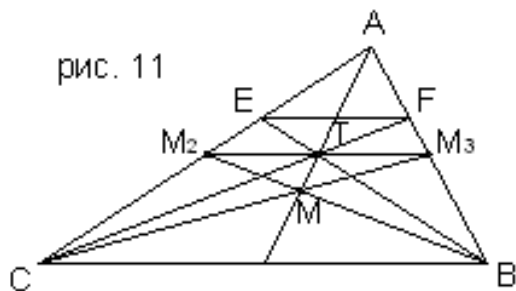
Задача 4. Дано $\triangle ABC$ і точку M_1 — середину BC . За допомогою однієї лінійки побудувати відрізок $EF \parallel BC$, де $E \in AC$ і $F \in AB$.



Розв'язання. З'єднаємо A з M_1 . Візьмемо на AM_1 довільну точку T та побудуємо E, F — точки перетину AC з променем BT та AB з променем CT (рис. 9). Залишається з'єднати E та F . Доведення того, що $EF \parallel BC$, випливає з так званої **леми про трапецію**: *середини основ, точка перетину діагоналей і точка перетину продовжень бічних сторін трапеції належать одній прямій* (рис. 10). Доведіть її.

Задача 5. Дано $\triangle ABC$ і точки M_2 та M_3 — середини AC і AB відповідно. Однією лінійкою необхідно побудувати $EF \parallel BC$, щоб при цьому $EF = \frac{1}{3}BC$.

Розв'язання. Вкажемо лише порядок проведення ліній (рис. 11): 1) M_2M_3 ; 2) BM_2 ; 3) CM_3 , причому $M = BM_2 \cap CM_3$; 4) AM , причому $T = AM \cap M_2M_3$; 5) BT до перетину з AC в точці E ; 6) CT до перетину з AB в точці F ; 7) EF .



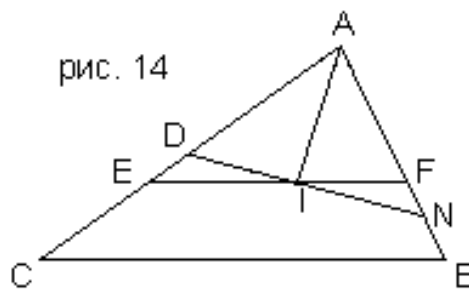
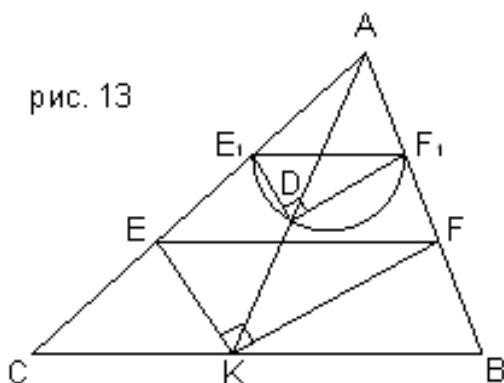
Тоді $EF \parallel BC$ за задачею 4 та $EF = \frac{1}{3}BC$, оскільки $CE : EA = 2 : 1$ (доведіть самостійно).

Задача 6. В $\triangle ABC$ побудувати $EF \parallel BC$ таким чином, щоб $BE \perp CF$ (рис. 12).

Розв'язання. Нехай BE перетинається з CF в точці T . Оскільки $\angle BTC = 90^\circ$, то T належить колу, побудованому на BC як на діаметрі. З іншого боку, T належить відрізку AM_1 за лемою про трапецію. Таким чином, T знаходиться на перетині медіани AM_1 з півколом, для якого BC є діаметром. Подальше є очевидним.

Задача 7. Побудувати $EF \parallel BC$, щоб з даної точки $K \in BC$ відрізок EF було видно під прямим кутом.

Розв'язання. Візьмемо відрізок $E_1F_1 \parallel BC$ і на ньому як на діаметрі побудуємо півколо (рис. 13). Нехай AK перетне це півколо в деякій точці D . З'єднавши D з E_1 та F_1 , отримаємо $\angle E_1DF_1 = 90^\circ$. Оскільки чотирикутники AE_1DF_1 і $AEKF$ гомотетичні, то залишається провести $KE \parallel DE_1$ і $KF \parallel DF_1$.

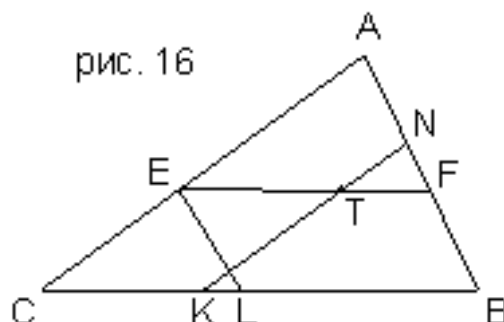
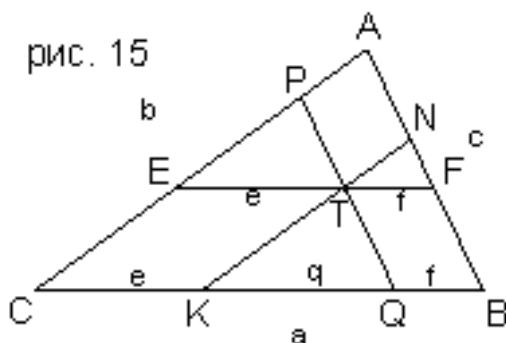


Задача 8. В $\triangle ABC$ через інцентр I проведено $EF \parallel BC$. Необхідно побудувати $DN = EF$ ($I \in DN$) в такий спосіб, щоб $DN = BN + CD$ (рис. 14).

Розв'язання. З точки A розхилом циркуля AF робимо засічку на AC — отримаємо точку D . Знов-таки з точки A розхилом циркуля AE робимо засічку на AB — знайдемо точку N . Точки D та N шукані. Справді, оскільки AI — бісектриса кута BAC , то трикутники AID і AIF , AIE і AIN рівні за двома сторонами та кутом між ними. Звідси випливає, що точки D, I, N лежать на одній прямій та $DN = EF = CE + BF = CD + BN$.

Задача 9. В середині даного $\triangle ABC$ необхідно побудувати точку T , в якій перетинаються три рівні відрізки: $EF = KN = PQ$, де $EF \parallel BC$, $KN \parallel AC$ і $PQ \parallel AB$ (рис. 15).

Розв'язання. Нехай $EF = KN = PQ = n$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $ET = CK = e$, $TF = QB = f$ і $KQ = q$.



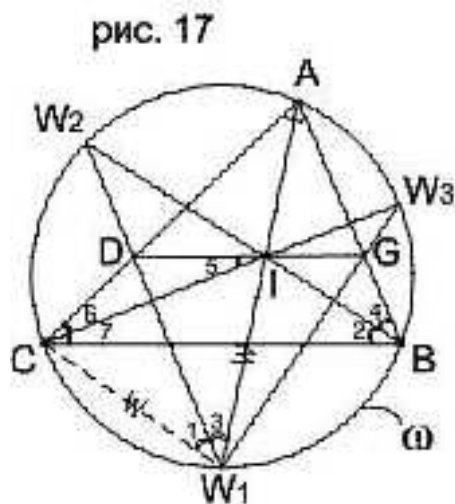
Тоді $\triangle NBK \sim \triangle ABC$ і $\frac{n}{b} = \frac{q+f}{a}$, $\triangle PQC \sim \triangle ABC$ і $\frac{n}{c} = \frac{e+q}{a}$.

Склавши ліві та праві частини одержаних рівнянь, отримаємо

$$\frac{n}{b} + \frac{n}{c} = \frac{e+q+f}{a} + \frac{q}{a} = 1 + \frac{q}{a}.$$

Але $q = a - (e + f) = a - n$. Отже, $\frac{n}{b} + \frac{n}{c} = 1 + \frac{a-n}{a}$. Звідси $n = \frac{2abc}{ab+bc+ac}$. Цей відрізок легко побудувати. Справді, $n = \frac{2ab}{\frac{ab}{c}+b+a}$. Далі робимо такі побудови: відкладаємо на BC відрізок $BL = n$ (рис.16). Промінь з точки L , паралельний до AB , перетне AC в точці E . Проводимо $EF \parallel BC$. Аналогічно провівши $KN \parallel AC$ і $KN = n$, отримаємо в перетині з EF шукану точку T .

Задача 10. Дано $\triangle ABC$ з описаним навколо нього колом ω . Також відомо положення інцентра I цього трикутника. Однією лінійкою проведіть $EF \parallel BC$, де $I \in EF$.



Розв'язання. Проведемо AI , BI , CI і продовжимо їх до перетину з ω відповідно в точках W_1 ; W_2 ; W_3 (рис. 17). Відрізок W_1W_2 перетне AC в точці D , а W_1W_3 перетне AB в точці G . Покажемо, що точки D , I , G належать одній прямій і, більше того, DG співпадає з шуканим відрізком EF . З'єднаємо C з W_1 . $\angle 1 = \angle 2 = \frac{B}{2}$ (вписані, спираються на одну дугу). Аналогічно $\angle 3 = \angle 4 = \frac{B}{2}$, отже $\angle 1 = \angle 3$. До того ж, $IW_1 = CW_1$ (це відомий факт геометрії трикутника — так звана “теорема про трилистник”). Тоді $\triangle DCW_1 = \triangle DIW_1$ (за двома сторонами та кутом між ними), звідки $DC = DI$ і $\angle 5 = \angle 6$. Але $\angle 6 = \angle 7 = \frac{C}{2}$. Таким чином, $\angle 5 = \angle 7$ і $DI \parallel BC$. Аналогічно можна показати, що $GI \parallel BC$. Робимо висновок, що точки D , I , G лежать на одній прямій і DG співпадає з шуканим відрізком EF .

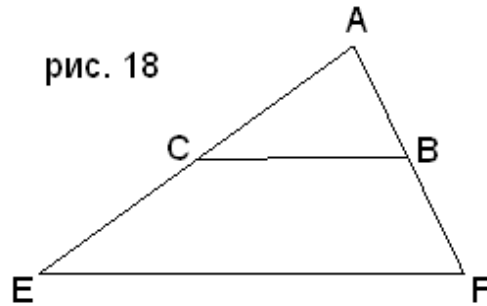
Перед тим, як запропонувати декілька задач для самостійного розв'язання, зробимо три зауваження.

- 1) Деякі задачі, включаючи й задачі Л. Керролла, мають інші способи розв'язання. Спробуйте знайти їх.
- 2) В усіх задачах (крім задачі 12) точки E та F належать сторонам AC і AB трикутника ABC , а не їх продовженням.
- 3) Самостійно проведіть дослідження в тих задачах, які того вимагають.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 11. Одним прямолінійним розрізом відріжте від даного $\triangle ABC$ трапецію $BCEF$, в якій менша основа дорівнює сумі бічних сторін.

Задача 12. На продовженнях AC і AB побудувати відповідно точки E та F такі, щоб $EF \parallel BC$ і до того ж виконувалась рівність $EF = BF + CE$ (рис. 18).



Задача 13. Відрізати від даного рівностороннього $\triangle ABC$ трапецію $BCEF$, в яку можна було б вписати коло.

Задача 14. Нехай AL_1 , BL_2 , CL_3 — бісектриси $\triangle ABC$, AL_1 перетинає L_2L_3 в точці T . Проведіть через T відрізок $EF \parallel BC$ і покажіть, що $2EF = BF + CE$.

Література.

1. Кэрролл Л. *История с узелками*. — М.: Фолио, 2001.
2. Кэрролл Л. *Логическая игра*. — М.: Наука, 1991.
3. Кэрролл Л. *Приключения Алисы в стране чудес*. — М.: Правда, 1982.
4. Кушнір І. *Тріумф шкільної геометрії*. — К.: Наш Час, 2005.
5. Делоне Б. Н., Житомирский О. К., Фетисов А. И. *Сборник геометрических задач*. — М.: Учпедгиз, 1951.
6. Прасолов В.В. *Задачи по планиметрии*. — М.: Наука, 1986.
7. *Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады*. "Квант", № 3, 2003.
8. Лейфура В. М. та інші. *Математичні олімпіади школярів України. 1991-2000*. — К.: Техніка, 2003.