Менелай «со звездочкой»

В этой главе мы поведем разговор о задачах повышенной трудности, в которых успешно применяется *теорема Менелая*. Более того, без теоремы Менелая некоторые из этих задач становятся просто «неприступной крепостью». Вместе с тем они известны, важны популярны. Поэтому представляется необходимым уделить пристальное внимание такого рода задачам.

Задача 1. *Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC и продолжений AB и AC в точках T, N, K соответственно. Q – точка пересечения BK и CN (рис.1). Докажите, что точки A, T, Q принадлежат одной прямой.*

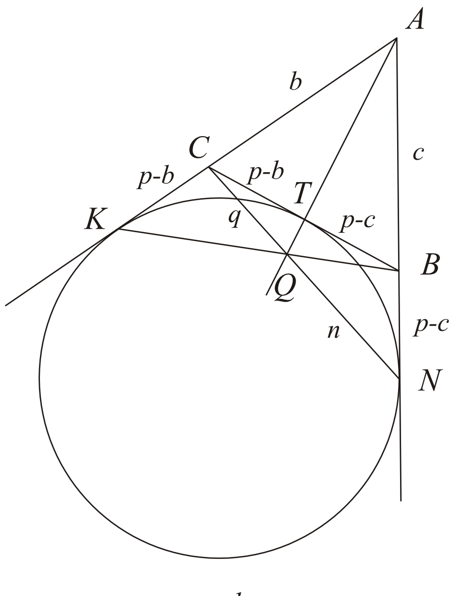

рис.1

<u>*Решение.*</u> Известно, что $CT = CK = p - b$, а $BT = BN = p - c$ *(покажите!)*. Пусть $CQ = q$ и $QN = n$. *По теореме Менелая* для ΔACN и секущей $K - Q - B$:

$$\frac{c}{p-c}\cdot\frac{n}{q}\cdot\frac{p-b}{p}=1 \qquad (1)$$

Если для ΔBCN и трех точек A, T, Q будет выполнено равенство $\frac{CT}{TB}\cdot\frac{BA}{AN}\cdot\frac{NQ}{QC}=1$, то по обратной теореме Менелая это и будет означать, что точки A, T, Q лежат на одной прямой. Итак,

$$\frac{CT}{TB}\cdot\frac{BA}{AN}\cdot\frac{NQ}{QC}=\frac{p-b}{p-c}\cdot\frac{c}{p}\cdot\frac{n}{q} \qquad (2)$$

Но правая часть равенства *(2)* в точности равна левой части равенства *(1)*. Значит, $\frac{CT}{TB}\cdot\frac{BA}{AN}\cdot\frac{NQ}{QC}=1$. Таким образом, точки A, T, Q принадлежат одной прямой.

Задача 2. *X – произвольная точка описанной окружности треугольника ABC. XK, XN и XT – перпендикуляры, проведенные из X к прямым BC, AC и AB соответственно (рис.2). Докажите, что точки K, N, T лежат на одной прямой (прямой Симпсона).*

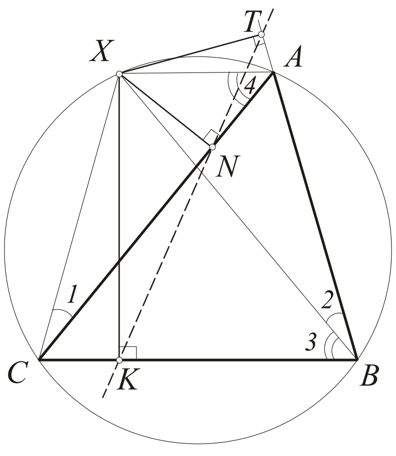

рис.2

<u>*Доказательство.*</u> Если мы докажем, что для ΔABC и точек $T-N-K$ будет выполняться равенство $\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BK}{KC}=1$, то, согласно *обратной теореме Менелая*, точки *T, N, K* лежат на одной прямой.
Пусть $\angle 1=\angle 2=\alpha$ (вписанные, опираются на одну дугу). Аналогично $\angle 3=\angle 4=\beta$. Пусть также $\angle XCB=\phi$, тогда $\angle XAB=180°-\phi$. А смежный с ним $\angle XAT=\phi$
Имеем: $CN=CX\cdot\cos\alpha$; $NA=AX\cdot\cos\beta$; $AT=AX\cdot\cos\phi$; $TB=BX\cdot\cos\alpha$; $BK=BX\cdot\cos\beta$ и $CK=CX\cdot\cos\phi$.

Тогда $\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BK}{KC}=\frac{CX\cdot\cos\alpha}{AX\cdot\cos\beta}\cdot\frac{AX\cdot\cos\phi}{BX\cdot\cos\alpha}\cdot\frac{BX\cdot\cos\beta}{CX\cdot\cos\phi}=1$.
Следовательно, $T-N-K$ – одна прямая.

Задача 3. *Отрезок EF, соединяющий середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника ABCD, делится его диагоналями на три равные части. Докажите, что ABCD – трапеция. Найдите отношение ее оснований.*
<u>*Решение.*</u> Пусть, согласно условию, $EK=KN=NF$ *(рис.3)*. Пусть также диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*.

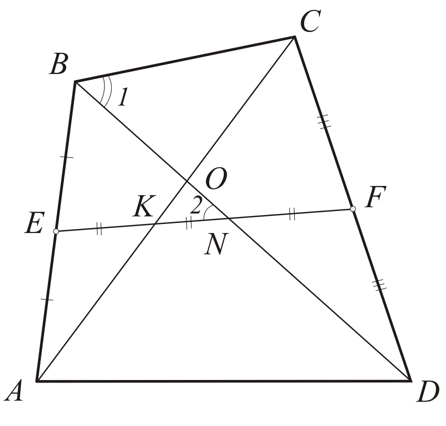

рис.3

По теореме Менелая для ΔNBE и секущей $O-K-A$ имеем:
$\frac{BO}{ON}\cdot\frac{NK}{KE}\cdot\frac{EA}{AB}=1$, откуда $\frac{BO}{ON}=\frac{2}{1}$ *(1).*

По теореме Менелая для ΔKCF и секущей $O-N-D$:

$\frac{CO}{OK}\cdot\frac{KN}{NF}\cdot\frac{FD}{DC}=1$, или $\frac{CO}{OK}=\frac{2}{1}$ *(2).*

Из *(1)* и *(2)* следует: $\frac{BO}{ON}=\frac{CO}{OK}$. Поскольку к тому же $\angle BOC=\angle NOK$ – вертикальные, то $\Delta BOC \sim \Delta NOK$. Тогда $\angle 1=\angle 2$. Но они являются внутренними накрест лежащими при прямых *BC, EF* и секущей *BN*. Следовательно, $EF \parallel BC$.

Становится очевидным, что *EK* – средняя линия в ΔABC, то есть $EK \parallel BC$, а *KF* – средняя линия в ΔACD, или $KF \parallel AD$. Значит, $BC \parallel AD$ и *ABCD* – трапеция.

Пусть $EK=KN=NF=t$. Тогда $BC=2EK=2t$, а $AD=2KF=4t$. Отношение оснований в трапеции *ABCD* равно $2t:4t=1:2$.

Задача 4. *Точки T, N, D соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC таковы, что* $\frac{AD}{DB}=\frac{BT}{TC}=\frac{CN}{NA}=k$ *(*$k<1$*).* *Прямые AT, BN и CD в пересечении дают* ΔQEF *(рис.4). Найдите отношение площади* ΔQEF *к площади* ΔABC*.*

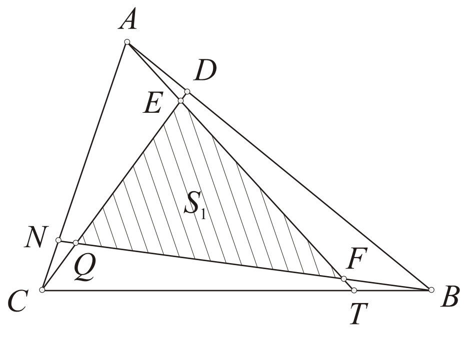

рис.4

<u>*Решение.*</u> Пусть $S_{ABC}=S$. Тогда $\frac{S_{BNC}}{S}=\frac{CN}{CA}=\frac{k}{k+1}$ (треугольники *BNC* и *ABC* имеют общую высоту, проведенную из вершины *B*). Аналогично $\frac{S_{ACD}}{S}=\frac{S_{ABT}}{S}=\frac{k}{k+1}$. *По теореме Менелая* для ΔABN и секущей $C-Q-D$

имеем: $\frac{NQ}{QB}\cdot\frac{BD}{DA}\cdot\frac{AC}{CN}=1$, или $\frac{NQ}{QB}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}=1$, откуда $\frac{NQ}{QB}=\frac{k^2}{k+1}$. Тогда

$$\frac{NQ}{NB}=\frac{k^2}{k^2+k+1} \qquad (1).$$

Следовательно, $\frac{S_{CNQ}}{S_{CNB}}=\frac{NQ}{NB}=\frac{k^2}{k^2+k+1}$ (у треугольников CNQ и CNB – общая высота, проведенная из вершины C).

Значит, $S_{CNQ}=S_{CNB}\cdot\frac{k^2}{k^2+k+1}=S\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k^2}{k^2+k+1}=S\cdot\frac{k^3}{(k+1)(k^2+k+1)}$.

Поскольку $S_{CNQ}=S_{AED}=S_{BFT}$, то $S_{QEF}=S-3S_{CNB}+3S_{CNQ}$, или

$$S_{QEF}=S-3S\cdot\frac{k}{k+1}+3S\cdot\frac{k^3}{(k+1)(k^2+k+1)};$$

$$\frac{S_{QEF}}{S}=1-\frac{3k}{k+1}+\frac{3k^3}{(k+1)(k^2+k+1)}=\frac{k^3-k^2-k+1}{(k+1)(k^2+k+1)}=\frac{(k-1)^2(k+1)}{(k+1)(k^2+k+1)}=$$

$$=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}=\frac{(k-1)^3}{k^3-1}$$

Задача 5. *Три окружности с центрами O_1; O_2; O_3 не имеют общих точек. Их попарные внешние касательные пересекаются в точках K, N, T (рис.5). Докажите, что точки K, N, T принадлежат одной прямой.*

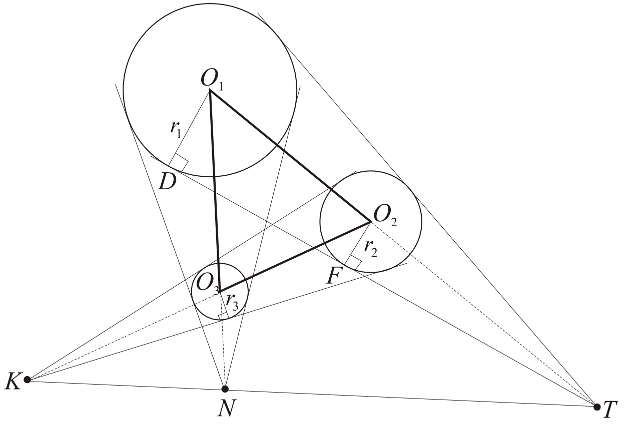

рис.5

<u>*Доказательство.*</u> Если для $\Delta O_1O_2O_3$ и точек K, N, T лежащих на продолжениях его сторон, выполняется соотношение: $\frac{O_1T}{TO_2}\cdot\frac{O_2K}{KO_3}\cdot\frac{O_3N}{NO_1}=1$, то *по обратной теореме Менелая* $K-N-T$ – это одна прямая. Обозначим радиусы окружностей O_1; O_2; O_3 через r_1; r_2; r_3 соответственно. Нетрудно заметить, что $\frac{O_1T}{TO_2}=\frac{r_1}{r_2}$ (из подобия треугольников O_1TD и O_2TF). Аналогично $\frac{O_2K}{KO_3}=\frac{r_2}{r_3}$ и $\frac{O_3N}{NO_1}=\frac{r_3}{r_1}$. Перемножив и сократив, получим в ответе 1. Задача решена!

Задача 6. *Окружность ω описана около треугольника ABC. Касательные к ω в вершинах треугольника пересекает прямые, содержащие его стороны, в точках K, N, T (рис.6). Докажите, что $K-N-T$ – одна прямая.*

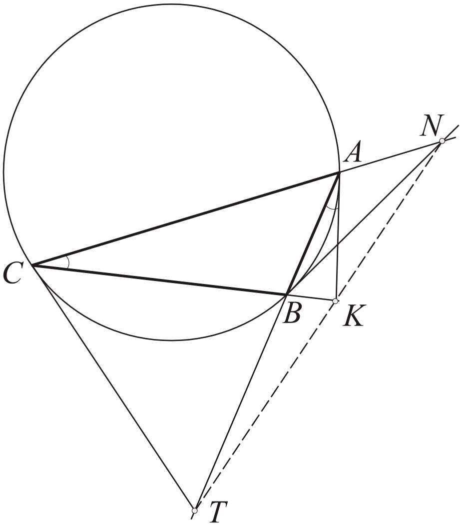

рис.6

<u>*Доказательство.*</u> Если для ΔABC и секущей $N-K-T$ будет выполняться равенство $\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AT}{TB}=1$, то *по обратной теореме Менелая* точки $N-K-T$ лежат на одной прямой. Покажем, что указанное равенство будет выполнено. $KC\cdot BK=KA^2$ (по теореме о квадрате касательной). $\frac{BK}{\sin C}=\frac{KA}{\sin\left(180°-B\right)}$ – по теореме синусов для ΔABK. Отсюда

$KA=BK\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$ и $KA^2=BK^2\cdot\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$. Следовательно, $KC\cdot BK=BK^2\cdot\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$,

или $\frac{BK}{KC}=\frac{\sin^2 C}{\sin^2 B}$. Аналогично $\frac{CN}{NA}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$ и $\frac{AT}{TB}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}$.

Перемножив левые и правые части последних трех равенств, получим 1, что равносильно решению задачи.

Задача 7. Окружность, вписанная в треугольник *ABC,* касается его сторон *BC, AC* и *AB* в точках K_1; K_2; K_3 соответственно. Прямые K_2K_3 и *CB* пересекаются в точке *N (рис.7)*.

F – середина отрезка NK_1. Докажите, что касательные из точки F к вписанной и описанной окружностям треугольника ABC равны.

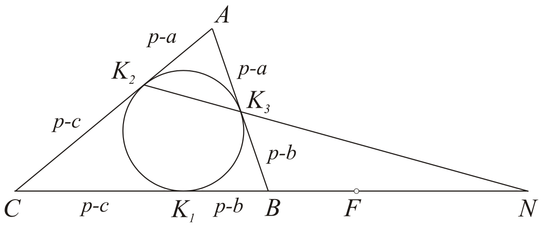

рис.7

<u>*Доказательство.*</u> Касательную t из точки F к описанной окружности находим по формуле: $t^2 = FC \cdot FB$ (по теореме о квадрате касательной). Тогда, чтобы решить задачу, достаточно показать, что $FK_1^2 = FC \cdot FB$. Применим *теорему Менелая к* ΔABC и секущей $K_2 - K_3 - N$: $\dfrac{AK_3}{K_3B} \cdot \dfrac{BN}{NC} \cdot \dfrac{CK_2}{K_2A} = 1$, или

$\dfrac{p-a}{p-b} \cdot \dfrac{BN}{a+BN} \cdot \dfrac{p-c}{p-a} = 1$, откуда $BN = \dfrac{a(p-b)}{b-c}$.

Тогда $NK_1 = BN + BK_1 = \dfrac{a(p-b)}{b-c} + (p-b)$, или $NK_1 = \dfrac{2(p-b)(p-c)}{b-c}$.

Поскольку $FK_1 = \dfrac{1}{2} NK_1$, то $FK_1 = \dfrac{(p-b)(p-c)}{b-c}$ *(1)*

$$FB = FK_1 - BK_1 = \frac{(p-b)(p-c)}{b-c} - (p-b) = \frac{(p-b)^2}{b-c}$$

$$FC = FK_1 + K_1C = \frac{(p-b)(p-c)}{b-c} + (p-c) = \frac{(p-c)^2}{b-c}$$

Следовательно, $FB \cdot FC = \dfrac{(p-b)^2 \cdot (p-c)^2}{(b-c)^2} = FK_1^2$ согласно равенству *(1)*.

Таким образом, касательные из точки F к вписанной окружности треугольника ABC равны.

Задача 8. *Через M_1 (середину стороны BC треугольника ABC) и его инцентр I проведена прямая, пересекающая высоту AH_1 в точке K (рис.8). Докажите, что AK = r, где r – радиус вписанной в треугольник ABC окружности.*

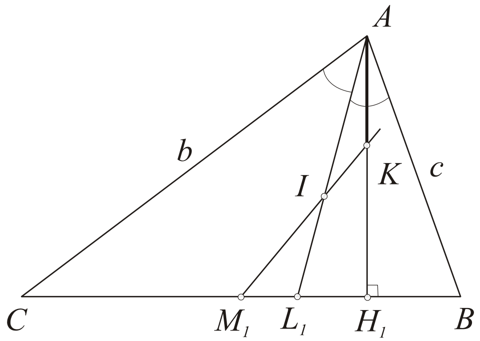

рис.8

<u>*Доказательство.*</u> Пусть в ΔABC $b>c$. Пусть также AL_1 и AM_1 – соответственно биссектриса и медиана треугольника. Применим *теорему Менелая* для ΔAH_1L_1 и секущей M_1-I-K: $\frac{AI}{IL_1}\cdot\frac{L_1M_1}{M_1H_1}\cdot\frac{H_1K}{KA}=1$

При этом, $\frac{AI}{IL_1}=\frac{b+c}{a}$ – известный факт геометрии треугольника.

$$L_1M_1=CL_1-CM_1=\frac{ab}{b+c}-\frac{a}{2}=\frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

$$M_1H_1=BM_1-BH_1=\frac{a}{2}-c\cdot\cos B=\frac{a}{2}-c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{b^2-c^2}{2a}.$$

Имеем: $\frac{b+c}{a}\cdot\frac{a(b-c)\cdot 2a}{2(b+c)(b-c)(b+c)}\cdot\frac{H_1K}{KA}=1$,

откуда $\frac{H_1K}{KA}=\frac{b+c}{a}$, или $\frac{H_1K}{KA}+1=\frac{b+c}{a}+1$, или $\frac{h_a}{KA}=\frac{2p}{a}$.

Тогда $KA=\frac{ah_a}{2p}=\frac{2S}{2p}=r$, что и требовалось доказать.

Еще ряд задач «со звездочкой» на теорему Менелая предложим для самостоятельного решения.

Задача 9. Окружности ω_1 и ω_2 имеют внешнее касание. K – точка пересечения их общих внешних касательных. Окружность ω_3 касается первых двух окружностей в точках E и F. Докажите, что точки F, E, K принадлежат одной прямой.

Задача 10. Прямая t пересекает стороны BC, AC и AB треугольника ABC (или их продолжения) соответственно в точках A_1; B_1; C_1. Докажите, что три точки, симметричные вершинам A, B и C относительно середин отрезков B_1C_1; A_1C_1 и A_1B_1, лежат на одной прямой.

Задача 11. Середины диагоналей выпуклого четырехугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений его противоположных сторон, лежат на одной прямой – *прямой Гаусса*. Докажите!

Задача 12. *(Теорема Паппа)* На одной из двух пересекающихся прямых взяты точки A, B, C. На другой – точки D, E, F *(рис.9)*. $K = AE \cap BD$; $N = AF \cap CD$ и $T = BF \cap CE$. Докажите, что точки K, N, T лежат на одной прямой.

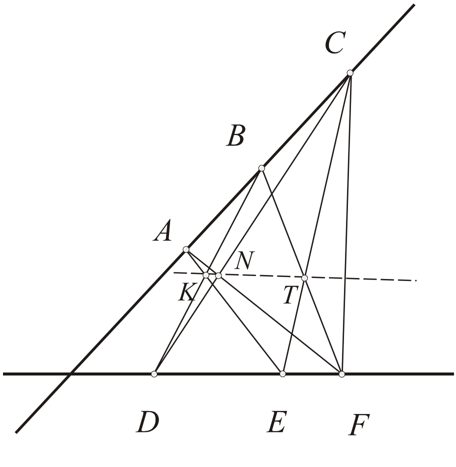

рис.9

Задача 13. *(теорема Паскаля)* Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой.

Задача 14. *(теорема Дезарга)* Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что прямые A_1A_2; B_1B_2 и C_1C_2 имеют общую точку Q *(рис.10)*. Пусть $K = A_1B_1 \cap A_2B_2$; $N = B_1C_1 \cap B_2C_2$ и $T = A_1C_1 \cap A_2C_2$. Докажите, что точки *K, N, T* лежат на одной прямой.

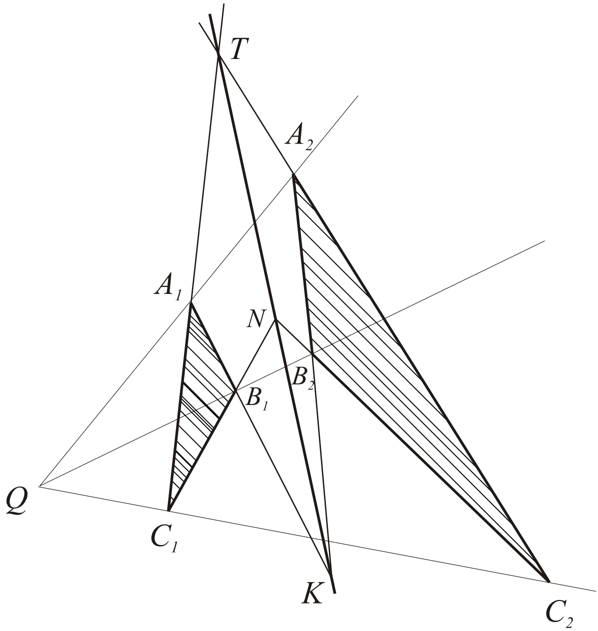

рис.10

Задача 15. Если все стороны пространственного четырехугольника касаются некоторой сферы, то четыре точки касания лежат в одной плоскости. Докажите!