Менелай «обыкновенный»

Древнегреческий математик и астроном *Менелай* (~70-130 гг. н.э.) стоит у истоков так называемой *сферической геометрии*. В арабском переводе Сабита ибн Корры до нас дошло его сочинение «Сферика» (“Sphaerica”). В этом труде Менелай дает определение сферическому треугольнику, отделяет тригонометрический материал от геометрического. А главное, в «Сферике» впервые встречается знаменитая ныне *теорема о трансверсалях*, названная арабскими математиками «правилом шести величин». Сегодня весь мир знает ее как *теорему Менелая*. Эта теорема помогает решить много важных, полезных, часто довольно трудных задач. Она, несомненно, является одной из «жемчужин» древнегреческой математики!
Прежде, чем приступить к обстоятельному разговору о применении *теоремы Менелая*, сформулируем и докажем ее.

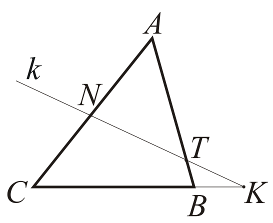

рис.1

Теорема Менелая. *Если секущая k пересекает прямые, содержащие стороны BC, AC и AB треугольника ABC соответственно в точках K, N, T (рис.1), то справедливо следующее соотношение:*

$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{NA}=1.$$

<u>*Доказательство.*</u>

<u>I способ</u>. Из вершин A, B, C проведем соответственно перпендикуляры h_1; h_2; h_3 к прямой k (*рис.2*).

$\frac{AT}{TB}=\frac{h_1}{h_2}$, поскольку $\Delta ADT \sim \Delta BET$. $\frac{BK}{KC}=\frac{h_2}{h_3}$ ($\Delta BEK \sim \Delta CFK$) и $\frac{CN}{NA}=\frac{h_3}{h_1}$ ($\Delta CFN \sim \Delta ADN$). Таким образом,

$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{NA}=\frac{h_1}{h_2}\cdot\frac{h_2}{h_3}\cdot\frac{h_3}{h_1}=1.$$

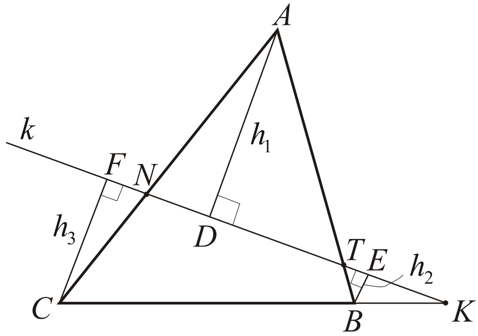

рис.2

<u>Замечание.</u> Для запоминания удобно брать всякий раз: <u>*в числителе*</u> – отрезок от вершины треугольника до точки на секущей. А <u>*в знаменателе*</u> – от точки на секущей до следующей вершины.

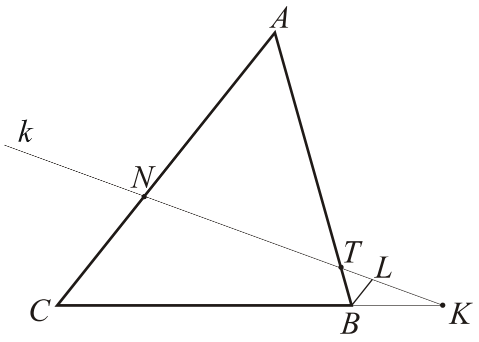

рис.3

<u>II способ</u>. Проведем $BL \parallel AC$ (*рис.3*). Тогда $\frac{AT}{TB}=\frac{AN}{BL}$ ($\Delta ANT \sim \Delta BLT$) и $\frac{BK}{KC}=\frac{BL}{CN}$ ($\Delta BLK \sim \Delta CNK$). Таким образом,

$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{NA}=\frac{AN}{BL}\cdot\frac{BL}{CN}\cdot\frac{CN}{NA}=1.$$

<u>III способ</u>. Проведем $BQ \parallel k$ (*рис.4*) и обозначим:

$$CQ=x;\ QN=y;\ NA=z.$$

По *теореме Фалеса*

$$\frac{AT}{TB}=\frac{z}{y};\ \frac{BK}{KC}=\frac{y}{x+y}\ \text{ и }\ \frac{CN}{NA}=\frac{x+y}{z}.$$

Нетрудно заметить, что опять-таки

$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{NA}=1.$$

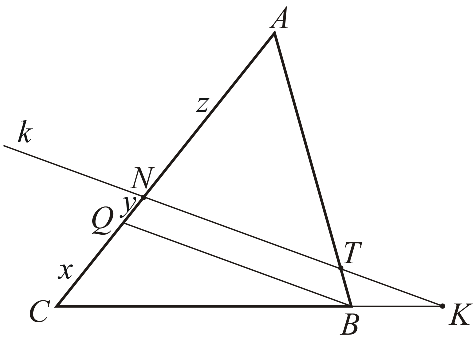

рис.4

Заметим , что верна и *обратная теорема Менелая*: *если для треугольника ABC и трех точек K, N, T на его сторонах (или их продолжениях) выполняется равенство* $\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{NA}=1$*, то точки* K; N; T *лежат на одной прямой* (*рис.1*).

Доказательство приводится *методом от противного* с применением *прямой теоремы Менелая* (выполните его самостоятельно).

Теперь – самое время предложить вниманию читателей серию задач, где применение *теоремы Менелая* представляется красивым, эффективным, мощным.

Задача 1. *Докажите, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.*

<u>*Доказательство.*</u> Пусть медианы AM_1 и BM_2 пересекаются в точке M *(рис.5)*. Применим *теорему Менелая* для ΔAM_1C и секущей BM_2: $\frac{AM}{MM_1}\cdot\frac{M_1B}{BC}\cdot\frac{CM_2}{M_2A}=1$.

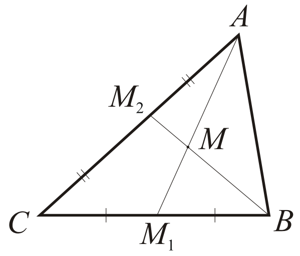

рис.5

Поскольку $\frac{M_1B}{BC}=\frac{1}{2}$ и $CM_2=M_2A$, то $AM:MM_1=2:1$.

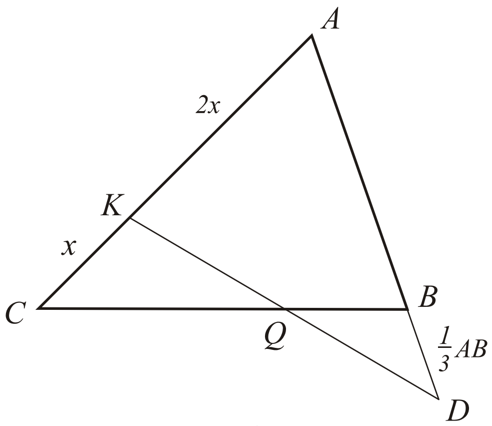

рис.6

Задача 2. *На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B взята такая точка D, что $BD=\frac{1}{3}AB$ (рис.6). $AK:KC=2:1$, где K – точка на стороне AC. Отрезок KD и сторона BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $DQ=QK$.*

<u>*Доказательство.*</u> По *теореме Менелая* для ΔAKD и секущей $C-Q-B$ имеем:

$$\frac{AB}{BD}\cdot\frac{DQ}{QK}\cdot\frac{KC}{CA}=1,$$

или

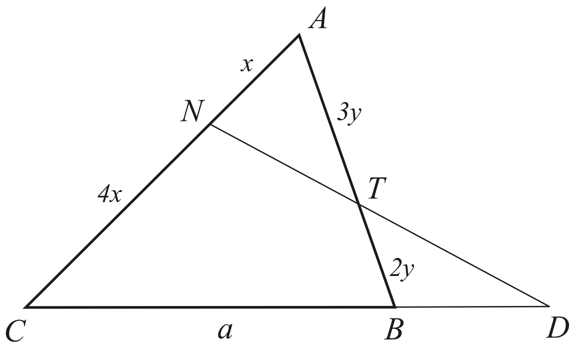

рис.7

$$\frac{AB}{\frac{1}{3}AB}\cdot\frac{DQ}{QK}\cdot\frac{x}{3x}=1$$, откуда получаем: $DQ=QK$.

Задача 3. *В треугольнике ABC сторона $BC=a$. Точки N и T соответственно на сторонах AC и AB таковы, что $\frac{CN}{NA}=\frac{4}{1}$ и $\frac{AT}{TB}=\frac{3}{2}$. Прямые NT и CB пересекаются в точке D (рис.7). Найдите CD.*

Решение. *По теореме Менелая* для ΔABC и секущей $N-T-D$:

$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CN}{NA}=1,\text{ или }\frac{3y}{2y}\cdot\frac{BD}{a+BD}\cdot\frac{4x}{x}=1,\text{ откуда }\frac{BD}{a+BD}=\frac{1}{6}\text{ и }BD=\frac{a}{5}.$$

Тогда $CD=\frac{6a}{5}$.

Задача 4. Медиана BM_2 и биссектриса CL_3 в треугольнике ABC пересекаются в точке Q. Найдите отношение $\frac{CQ}{QL_3}$, если $A=30°,\ B=45°$.

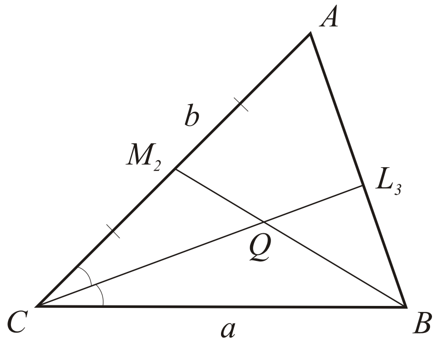

рис.8

Доказательство. Пусть $BC=a,\ AC=b$ *(рис.8)*. *По теореме Менелая* для ΔACL_3 и секущей M_2-Q-B имеем:

$$\frac{CQ}{QL_3}\cdot\frac{L_3B}{BA}\cdot\frac{AM_2}{M_2C}=1.$$

Поскольку $AM_2=M_2C$, то $\frac{CQ}{QL_3}=\frac{BA}{L_3B}=\frac{BL_3+AL_3}{BL_3}=1+\frac{AL_3}{BL_3}$, где $\frac{AL_3}{BL_3}=\frac{b}{a}$ (по свойству биссектрисы).

Тогда $\frac{CQ}{QL_3}=1+\frac{b}{a}=1+\frac{2R\cdot\sin B}{2R\cdot\sin A}=1+\frac{\sin 45°}{\sin 30°}=1+\sqrt{2}$.

Задача 5. *Биссектрисы AL_1 и BL_2 треугольника ABC пересекаются в точке I (рис.9). Докажите справедливость формулы* $\frac{AI}{IL_1}=\frac{b+c}{a}$.

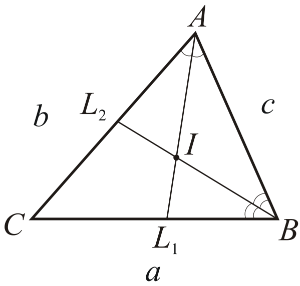

рис.9

Доказательство. По *теореме Менелая* для ΔAL_1C и секущей BL_2 имеем:

$\frac{AI}{IL_1}\cdot\frac{L_1B}{BC}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1$. Однако $\frac{CL_2}{L_2A}=\frac{a}{c}$ (свойство биссектрисы) и, поскольку $\frac{CL_1}{L_1B}=\frac{b}{c}$, то добавив по 1 и перевернув, получим: $\frac{L_1B}{BC}=\frac{c}{b+c}$.

Таким образом, $\frac{AI}{IL_1}\cdot\frac{c}{b+c}\cdot\frac{a}{c}=1$, откуда $\frac{AI}{IL_1}=\frac{b+c}{a}$.

Задача 6. *В треуголнике ABC ортоцентр H делит высоту AH_1 пополам. Докажите, что* $\cos A=\cos B\cdot\cos C$.

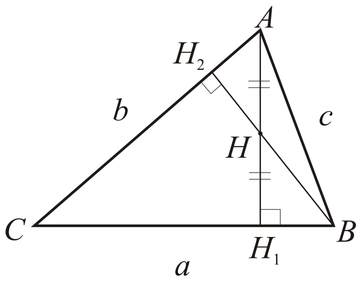

рис.10

Доказательство. Применим теорему Менелая для ΔAH_1C и секущей BH_2 *(рис.10)*:

$$\frac{AH}{HH_1}\cdot\frac{H_1B}{BC}\cdot\frac{CH_2}{H_2A}=1 \qquad (1).$$

Но $\frac{AH}{HH_1}=1$ (по условию); $H_1B=c\cdot\cos B$ (из ΔABH_1); $BC=a$; $CH_2=a\cdot\cos C$ (из ΔCH_2B) и $H_2A=c\cdot\cos A$ (з ΔAH_2B). Следовательно, согласно (1) получим: $\frac{1}{1}\cdot\frac{c\cdot\cos B}{a}\cdot\frac{a\cdot\cos C}{c\cdot\cos A}=1$, откуда $\cos A=\cos B\cdot\cos C$.

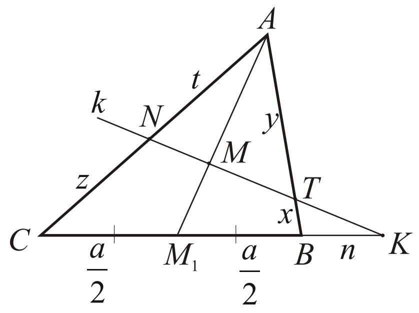

рис.11

Задача 7. *Через центроид M треугольника ABC проведена секущая k. Докажите, что в обозначениях рис.11* $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}=1$.

<u>*Доказательство*</u>. Проведем медиану AM_1 и по *теореме Менелая* для ΔABM_1 и секущей k запишем: $$\frac{y}{x}\cdot\frac{n}{\frac{a}{2}+n}\cdot\frac{1}{2}=1$$

(поскольку $\frac{M_1M}{MA}=\frac{1}{2}$) $\Rightarrow$

$\frac{x}{y}=\frac{n}{a+2n}$ (1).

Теорема Менелая для ACM_1 и секущей k дает такое равенство:

$$\frac{z}{t}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{\frac{a}{2}+n}{a+n}=1.$$

Тогда $\frac{z}{t}=\frac{a+n}{a+2n}$ (2).

Сложив левые и правые части равенств (1) и (2), получим:

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t}=\frac{n+a+n}{a+2n}=1.$$

Задача 8. *BL_2 и CL_3 – биссектрисы в треугольнике ABC. Прямые L_2L_3 и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что Q совпадает с основанием внешней биссектрисы угла A.*

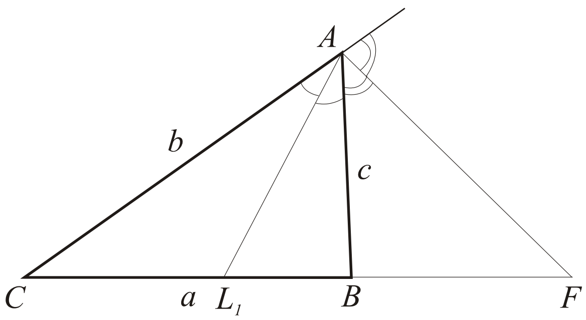

рис.12

Доказательство. Известно, что для точки F – основания внешней биссектрисы угла A – выполняется равенство: $\frac{FC}{FB}=\frac{b}{c}$ *(рис.12).* Докажите этот факт самостоятельно. Чтобы $Q\equiv F$, необходимо доказать: $\frac{QC}{QB}=\frac{b}{c}$ *(рис.13)*. По теореме Менелая для ΔABC и секущей L_2-L_3-Q: $\frac{AL_3}{L_3B}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1$, или $\frac{b}{a}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{a}{c}=1$, откуда $\frac{QC}{QB}=\frac{b}{c}$.

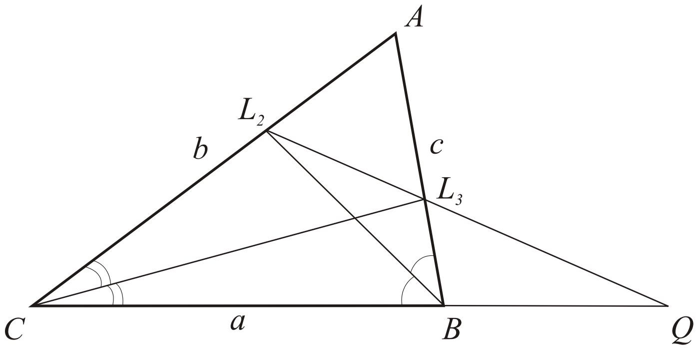

рис.13

Следовательно, Q - основание внешней биссектрисы угла A.

Задача 9. *ABCD* и *AFKL* – параллелограммы. *FD* и *BL* пересекаются в точке *T (рис.14)*. Докажите, что точки $C-K-T$ принадлежат одной прямой.

Доказательство. Применим теорему Менелая для ΔABL и секущей $F-T-D$.

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BT}{TL}\cdot\frac{LD}{DA}=1 \quad (1).$$

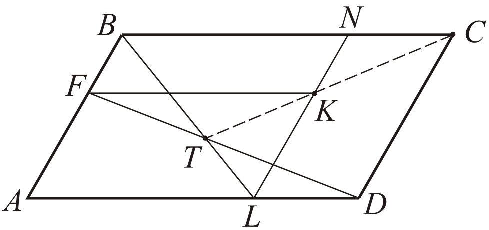

рис.14

Продолжим LK до пересечения с BC в точке N. Если для ΔBLN и трех точек C; K; T выполняется *обратная теорема Менелая*, то эти 3 точки принадлежат одной прямой.

Итак, проверим, равно ли 1 выражение

$$\frac{LK}{KN}\cdot\frac{NC}{CB}\cdot\frac{BT}{TL} \quad (2).$$

Нетрудно заметить, что $\frac{LK}{KN}=\frac{AF}{FB}$ и $\frac{NC}{CB}=\frac{LD}{DA}$. Подставим в (2) и получим формулу (1): $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{LD}{DA}\cdot\frac{BT}{TL}=1$. Следовательно, $C-K-T$ – одна прямая.

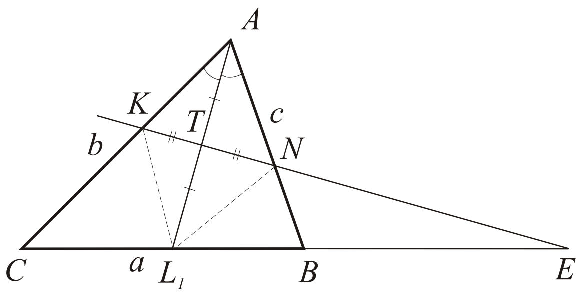

рис.15

Задача 10. *Серединный перпендикуляр к биссектрисе AL_1 треугольника ABC пересекает прямую CB в точке E. Докажите, что $\frac{CE}{BE}=\frac{b^2}{c^2}$.*

<u>Доказательство.</u> Пусть проведенный серединный перпендикуляр пересекает AC; AL_1 и AB соответственно в точках K, T, N *(рис.15)*. Нетрудно показать, что AKL_1N – ромб (*покажите!*). По теореме Менелая для ΔABC и секущей $K-N-E$: $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CK}{KA}=1$. Поскольку $\frac{AN}{NB}=\frac{CL_1}{L_1B}=\frac{b}{c}$ и $\frac{CK}{KA}=\frac{CL_1}{L_1B}=\frac{b}{c}$, то $\frac{CE}{BE}=\frac{b^2}{c^2}$.

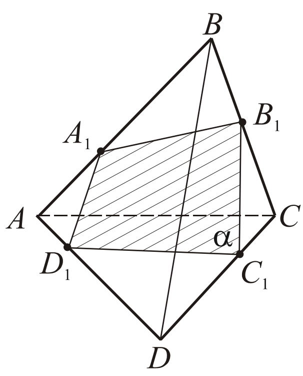

рис.16

И перед тем, как перейти к задачам для самостоятельного решения, обратим внимание на стереометрическое обобщение теоремы Менелая.

Если плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA тетраэдра BACD соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1, то $\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1$ (рис.16).

Доказательство. Пусть h_1; h_2; h_3; h_4 – это расстояния соответственно от точек A; B; C; D до плоскости α (на *рис.16* эти расстояния не указаны, однако их легко представить).

Тогда очевидно, что $\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{h_1}{h_2}$; $\frac{BB_1}{B_1C}=\frac{h_2}{h_3}$; $\frac{CC_1}{C_1D}=\frac{h_3}{h_4}$ и $\frac{DD_1}{D_1A}=\frac{h_4}{h_1}$. Остается лишь перемножить полученные соотношения.

Задачи для самостоятельного решеня.

Задача 11. В треугольнике *ABC* биссектриса AL_1 делит сторону *BC* в отношении $2:1$ ($CL_1:BL_1=2:1$). В каком отношении медиана CM_3 делит эту биссектрису?

Задача 12. Через точку M_1 – середину стороны *BC* треугольника *ABC* – проведена прямая. Она пересекает *AC* в точке *K* и продолжение *AB* (за вершину *B*) – в точке *N*, причем $AK=AN$. Докажите, что $BN=CK$.

Задача 13. На медиане CM_3 треугольника *ABC* взята точка *K* – такая, что $CK:KM_3=3:1$. Прямые *AK* и *BC* пересекаются в точке *D*. Найдите отношение площадей треугольников *ACD* и *ABD*.

Задача 14. AH_1 – высота в треугольнике *ABC*, *H* – его ортоцентр. Докажите, что $\frac{AH}{HH_1}=\frac{\cos B\cdot\cos C}{\cos A}$.

Задача 15. С помощью теоремы Менелая докажите *теорему Чевы*: если AA_1; BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке – точке *K* *(рис.17)*, то справедливо такое правило шести величин: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

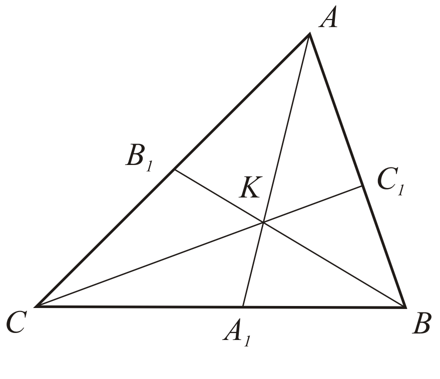

рис.17

Задача 16. С помощью теоремы

Менелая докажите так называемую *лемму о трапеции*: середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Задача 17. Q и T – соответственно середины BC и AD – оснований трапеции $ABCD$ *(рис.18)*. K – точка на продолжении диагонали AC. Прямые KQ и AB пересекаются в точке E, а KT и CD – в точке F. Докажите, что $EF \parallel AD$.

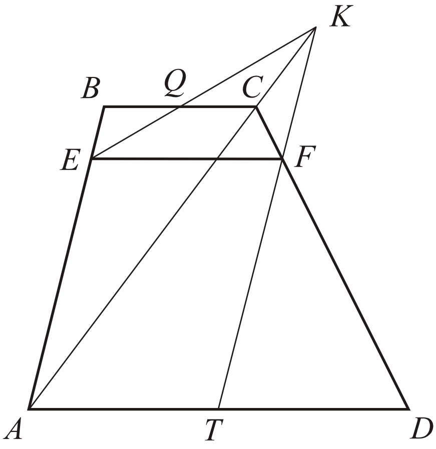

рис.18

Задача 18. Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам треугольника ABC с продолжениями соответствующих сторон треугольника лежат на одной прямой.

Задача 19. *(обратная стереометрическая теорема Менелая)* Если для четырех точек A_1; B_1; C_1; D_1, лежащих соответственно на ребрах AB, BC, CD и DA тетраэдра, выполняется равенство $\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1B}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1$, то четыре указанные точки лежат в одной плоскости.