Прямая Эйлера и две точки вне прямой: коллекция задач на построение.

Г.Филипповский

Разве не удивительно, что в любом треугольнике на одной прямой – *прямой Эйлера* – лежат три замечательные точки:
центр O описанной окружности;
центроид M – точка пересечения медиан;
ортоцентр H – точка пересечения высот?!!
Убедимся в этом, доказывая попутно важные факты геометрии треугольника. Здесь и далее рассмотрению подлежит *остроугольный треугольник ABC*, поскольку случаи тупоугольного треугольника принципиальных отличий не приносят.

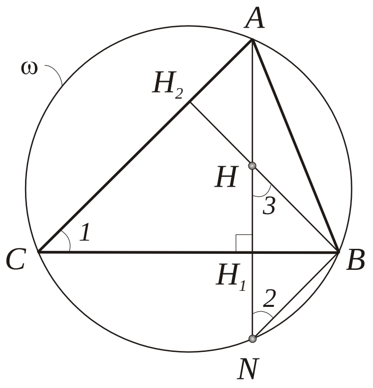

рис.1

Пусть в ΔABC высоты AH_1 и BH_2 пересекаются в ортоцентре H *(рис.1)*. Продолжим AH_1 до пересечения с ω – описанной окружностью ΔABC – в точке N.
$\angle 1 = \angle 2$ (вписанные, опираются на одну дугу) и
$\angle 1 = \angle 3$ (углы со взаимно-перпендикулярными сторонами). Из равенства треугольников BHH_1 и BNH_1 следует: $\boxed{HH_1 = H_1N}$. Таким образом, доказан

Факт 1. *Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на описанной окружности этого треугольника.*

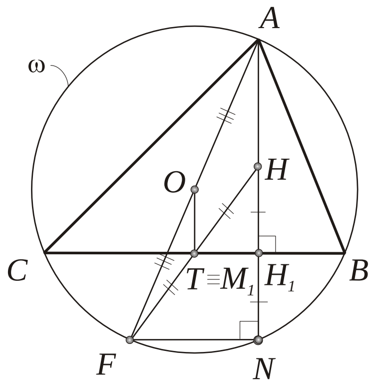

рис.2

Проведем $NF \parallel BC$, где $F \in \omega$ *(рис.2)*. Так как $\angle ANF = 90°$, то AF – диаметр ω с центром O в середине AF. Пусть также $T = HF \cap BC$. Очевидно, H_1T – средняя линия в ΔHNF и $HT = TF$. Соединим O и T. Тогда OT – средняя линия в ΔAHF и $OT = \dfrac{1}{2}AH$. Следовательно, $OT \perp BC$ и точка T совпадает с M_1 – серединой стороны BC.

Тем самым доказано еще несколько фактов.

Факт 2. $\boxed{OM_1 = \dfrac{1}{2}AH}$. *Расстояние от центра описанной окружности до стороны вдвое меньше расстояния от ортоцентра до противоположной вершины треугольника.*

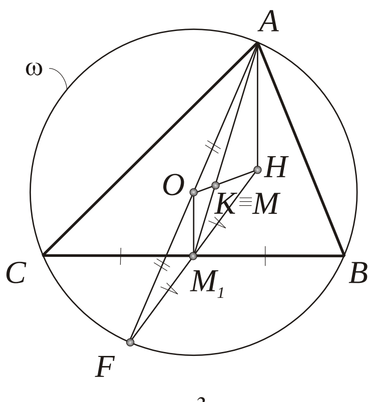

рис.3

Факт 3. $\boxed{HM_1 = M_1F}$.*Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, также принадлежат описанной около этого треугольника окружности. Они диаметрально* *противоположны соответствующим вершинам треугольника.*

Пусть в ΔAHF медианы AM_1 и HO пересекаются в точке *K (рис.3)*. тогда $AK : KM_1 = 2:1$ и $HK : KO = 2:1$. Однако AM_1 – медиана и в ΔABC. Значит, $AM : MM_1 = 2:1$, где *M* – центроид в ΔABC. Таким образом, $K \equiv M$ и точки *O, M, H* принадлежат одной прямой.

Факт 4. *(собственно прямая Эйлера). Центр описанной окружности треугольника, его центроид и его ортоцентр лежат на одной прямой.*

Факт 5. $\boxed{2OM = MH}$. *Находясь на одной прямой с O и H, центроид M произвольного треугольника расположен вдвое ближе к точке O.*

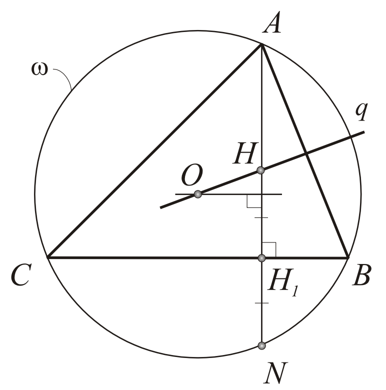

рис.4

Ну вот, теперь самое время перейти к заявленной теме. Во всех предложенных ниже упражнениях нужно будет с помощью циркуля и линейки построить ΔABC по его прямой Эйлера *(q)* и двум точкам вне этой прямой. Такие задания развивают детей, углубляют их знания. Они педагогичны, во многом оригинальны и, наконец, вызывают интерес у школьников.

Задача 1. Постройте ΔABC по $q; A; H_1$, где H_1 – основание высоты, проведенной из вершины *A*.
<u>*Решение.*</u> Очевидно, $H = AH_1 \cap q$ *(рис.4)*. Продлеваем HH_1 до точки *N*: $H_1N = HH_1$ *(факт 1)*. *AN* – хорда в окружности *ω*, описанной около ΔABC. Поэтому серединный перпендикуляр к *AN* пересекает *q* в точке *O*. Прямая, проведенная через H_1 перпендикулярно *AN*, в пересечении с окружностью $\omega(O; OA)$ дает недостающие вершины *B* и *C*.

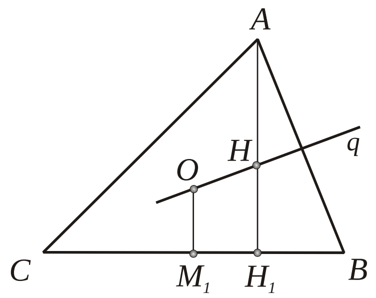

рис.5

Задача 2. Постройте ΔABC по $q; M_1; H_1$.
<u>*Решение.*</u> Проведем прямую M_1H_1. Перпендикуляры к ней из точек M_1 и H_1 в пересечении с *q* дадут точки *O* и *H* соответственно *(рис.5)*. Продолжим отрезок H_1H за точку *H* на $2OM_1$ и получим вершину *A (факт 2)*. Окружность $\omega(O; OA)$ и прямая M_1H_1 пересекаются в точках *B* и *C*.

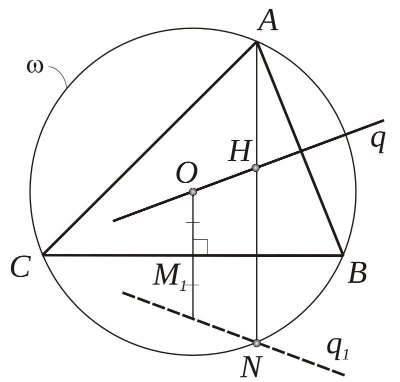

рис.6

Задача 3. *q;B;C.*
<u>*Решение.*</u> Серединный перпендикуляр к *BC* пересекает прямую Эйлера в точке *O (рис.6)*. Окружность $\omega(O; OB = OC)$ пересекает прямую q_1, симметричную *q* относительно *BC*, в точке *N (факт 1)*. Прямая, проведенная через *N* параллельно OM_1, пересекает *ω* в вершине *A*.

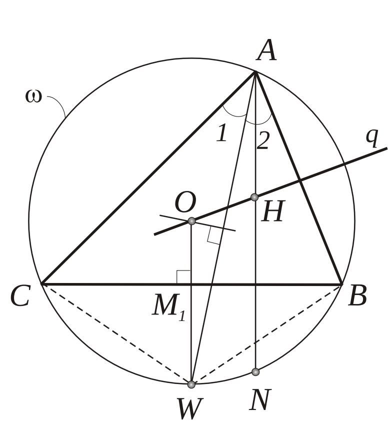

рис.7

Задача 4. $q; A; W$, где W – точка пересечения продолжения биссектрисы угла A с окружностью ω, описанной около ΔABC.
<u>*Решение.*</u> Анализ показывает, что поскольку $\angle 1 = \angle 2$ *(по условию)*, то $BW = CW$ и $WM_1 \perp BC$ *(рис.7)*. отсюда построение: серединный перпендикуляр к AW пересекает q в точке O. Строим окружность $\omega(O; OA)$. Через вершину A проводим прямую параллельно OW. Она пересекает q в точке H, а ω – в точке N. Дальнейшее очевидно!

Задача 5. $\boxed{q; M_1; W}$
<u>*Решение.*</u> Прямая WM_1 пересекает q в точке O *(рис.8)*. Далее строим окружность $\omega(O; OW)$. Завершить задачу можно двумя способами.
I способ. Перпендикуляр в точке M_1 к отрезку OM_1 пересекает ω в вершинах B и C. Теперь мы имеем *задачу 3*.
II способ. Проводим прямую $q_2 \parallel q$ на расстоянии $2OM_1$ от нее (за точку O). Очевидно, q_2 пересекает ω в вершине A *(факт 2)*.

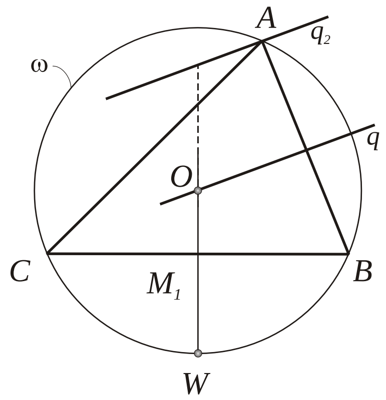

рис.8

Задача 6. $\boxed{q; N; F}$, где F – точка, симметричная ортоцентру H относительно M_1 – середины BC.
<u>*Решение.*</u> Так как F – точка, диаметрально противоположная вершине A *(факт 3)*, то $\angle FNA = 90°$. Стало быть, проводим через N прямую $n \perp FN$ *(рис.9)*. Серединный перпендикуляр к FN пересекает q в точке O. Поскольку $H = n \cap q$ и $A = n \cap \omega$, где $\omega(O; ON = OF)$, то дальнейшее очевидно!..
Несколько аналогичных задач предложим для самостоятельного решения.

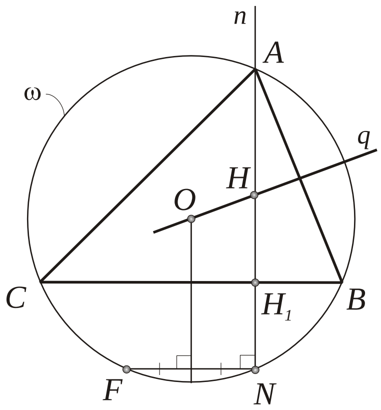

рис.9

Задача 7. $\boxed{q; A; N}$.
Задача 8. $\boxed{q; B; H_1}$.
Задача 9. $\boxed{q; M_1; N}$.
Задача 10. $\boxed{q; M_1; D}$, где D – точка пересечения прямой AM_1 с окружностью ω.
Задача 11. $\boxed{q; W; B}$.
Задача 12. $\boxed{q; W; F}$.

<u>Замечание.</u> Почти каждая из предложенных 12 задач с помощью *фактов 1-5* может быть решена и по-другому.

Казалось бы, вот и все. Тема, в общем, исчерпана.

Но нет, она имеет свое продолжение. И весьма любопытное!
В свое время *Леонард Эйлер* показал, что 9 точек в треугольнике:
середины сторон $M_1; M_2; M_3$;
основания высот: $H_1; H_2; H_3$;
середины отрезков $AH; BH; CH$ – соответственно точки $E_1; E_2; E_3$, –

лежат на одной окружности ω_1 – *рис.10*.

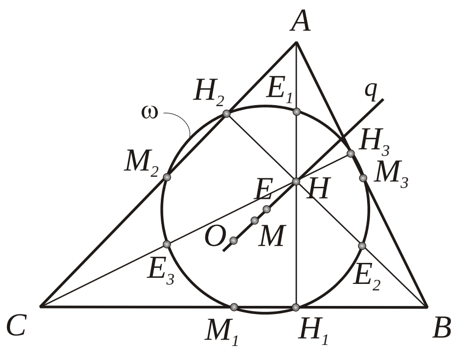

рис.10

Ее называют *окружностью Эйлера*. Для нашего разговора важно то, что *центр E окружности* ω_1 *находится на прямой Эйлера и совпадает с серединой отрезка OH* (докажите это самостоятельно, показав, например, что $EM_1 = EH_1 = EE_1$).

При этом, поскольку центроид *M* в ΔABC и в $\Delta M_1M_2M_3$ - один и тот же, а точка *O* – ортоцентр в $\Delta M_1M_2M_3$ *(покажите!)*, то прямые Эйлера для треугольников *ABC* и $M_1M_2M_3$ совпадают!

Следовательно, можем продолжить серию задач, расширить нашу коллекцию упражнений на *прямую Эйлера и две точки вне прямой*.

Задача 13. $\boxed{q; M_1; M_2}$.

<u>*Решение.*</u> Для $\Delta M_1M_2M_3$ имеем прямую Эйлера и 2 вершины *(рис.11)*. находим вершину M_3 *(задача 3)*. Далее строим ΔABC по серединам трех его сторон. Это – известное, легкое построение.

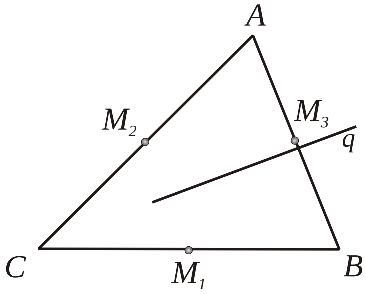

рис.11

Задача 14. $\boxed{q; E_1; M_2}$.

<u>*Решение.*</u> Серединный перпендикуляр к M_2E, пересекает *q* в центре *E* окружности Эйлера *(рис.12)*. Поскольку OM_1E_1A - параллелограмм ($OM_1 = AE_1$ и $OM_1 \parallel AE_1$), то M_1E_1 - диаметр окружности Эйлера. Поэтому, удвоив отрезок E_1E за точку *E*, получим M_1. Теперь имеем *задачу 13*.

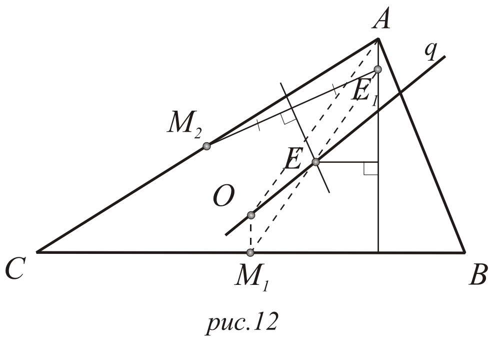

рис.12

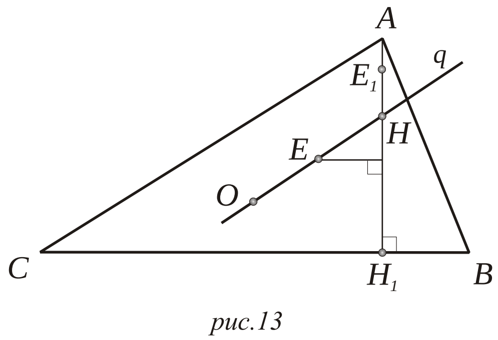

рис.13

Задача 15. $\boxed{q; H_1; E_1}$.

<u>*Решение.*</u> Очевидно, $H = E_1H_1 \cap q$. Серединный перпендикуляр к E_1H_1 пересекает *q* в точке *E* *(рис.13)*. Удваиваем *HE* за точку *E* – получим *O*. Дальнейшее очевидно!

Задача 16. $\boxed{q; H_2; H_3}$.

<u>*Решение.*</u> Анализ показывает: *AH* – диаметр окружности, описанной около черехугольника

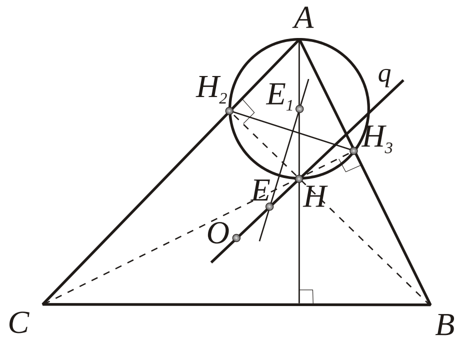

рис.14

AH_2HH_3 (два противоположных угла равны по $90°$), а E_1 - середина AH – центр этой окружности *(рис.14)*. отсюда построение: серединный перпендикуляр к H_2H_3 пересекает q в точке E. На нем откладываем $EE_1 = EH_2$ (радиусы окружности Эйлера). Окружность с центром E_1 радиуса E_1H_2 пересекает q в ортоцентре H. Удвоив HE_1, получаем вершину A, удвоив HE – точку O. Дальнейшее очевидно!
Еще несколько аналогичных задач предлагаем решить самостоятельно.

Задача 17. $\boxed{q; M_1; H_2}$.

Задача 18. $\boxed{q; E_1; H_2}$.

Задача 19. $\boxed{q; H_1; M_2}$.

Задача 20. $\boxed{q; E_1; E_2}$.

Литература.

1) Кушнир И. Геометрия. Планиметрия. Том 1. – К.: Астарта, 1996.
2) Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Часть I. – М.: Наука, 1991.
3) Филипповский Г. Школьная геометрия в миниатюрах. – К.:ГРОТ, 2002.
4) Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. – М.: Наука, 1986.