# Глава 20

## Предисловие

Много лет пришлось поработать в школе, чтобы составить свою точку зрения на методику преподавания теоремы Чевы в математических классах. Сегодня эта точка зрения есть. Она опробирована как на уроках, так и на занятиях спецкурсов. Есть ощущение, что у детей и учителя **«получается»**! Будет здорово, если такой подход пригодится коллегам, что-то им подскажет, принесет пользу.

Г.Филипповский, Русановский лицей, г.Киев

### Занятие 1 (2 часа).

## Чева «обыкновенный»

Джиованни Чева (1648-1734), итальянский геометр, по профессии инженер-гидравлик, в работе «О прямых линиях» доказал теорему, носящую его имя. Чева называл ее задачей. Он предложил как чисто геометрическое решение, так и то, которое может быть получено исходя из механических соображений. Чева родился в Милане, обучался в Пизанском университете. Будучи специалистом по гидравлике, работал экономистом (правительственным комиссаром) в одном из герцогств Италии. В математике Чева более всего интересовался коническими сечениями, построениями касательных к ним. Разрабатывал учение о секущих. Его ученик Д.Саккери был одним из тех, кто предвосхитил появление неевклидовой геометрии. И все же для человечества Чева останется в первую очередь как автор знаменитой, фундаментальной *теоремы Чевы,* которая решала (и решает) многие геометрические задачи.

Обычно в геометрической «табели о рангах» теоремы Чевы и Менелая стоят рядом. И это вполне справедливо. Они действительно близки по значимости, по формульному виду, по идейному смыслу. Более того, существует ряд задач, которые успешно решаются как раз совместным применением *теорем Чевы и Менелая*. Вместе с тем не забудем, что *теорема Менелая* старше примерно на полторы тысячи лет! (древнегреческий геометр Менелай жил в I$^{\underline{ом}}$ веке нашей эры). Именно поэтому среди большого числа способов доказательства *теоремы Чевы* мы выберем тот, который базируется на *теореме Менелая* – своей исторической предшественнице.

***Теорема Чевы.***

Пусть чевианы $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в точке $K$ *(рис.1)*. Докажите, что в таком случае $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ *(1).*

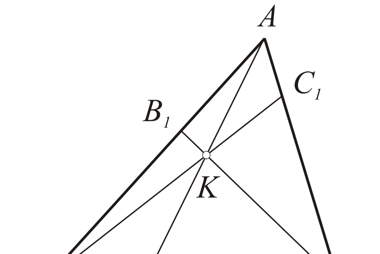


*рис.1*

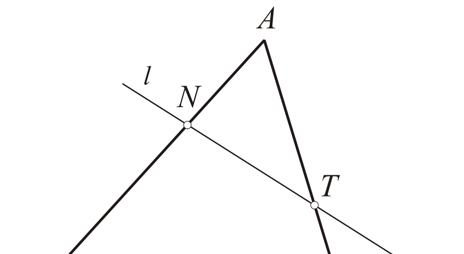


*рис.2*

<u>*Решение.*</u>

Напомним содержание теоремы Менелая. Пусть некоторая прямая *l* пересекает стороны треугольника *ABC* (или их продолжения) в точках *N*, *T* и *Q* *(рис.2).* Тогда справедливо следующее равенство: $\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CN}{NA}=1.$

Докажите теорему Менелая самостоятельно или же воспользуйтесь указанной в списке литературой.

Вновь переходим к *рис.1*. По *теореме Менелая* для $\Delta ACA_1$ и секущей $B_1 - K - B$ имеем:

$\frac{AK}{KA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ *(2)* По той же теореме Менелая для $\Delta ABA_1$ и секущей $C_1 - K - C$

получаем: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{CA_1} \cdot \frac{A_1K}{KA} = 1$ *(3)*.

Перемножив *(2)* и *(3)* и проведя сокращение на *AK, BC,* $A_1K$, получим следующее:

$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, что равносильно доказательству *теоремы Чевы*.

Замечание 1. Так же, как верна *обратная теорема Менелая,* верна и *обратная теорема Чевы:* если для чевиан $AA_1$; $BB_1$; $CC_1$ выполняется равенство *(1)*, то они пересекаются в одной точке *(докажите самостоятельно!)*.

Замечание 2. На ряде несложных по своей сути задач-примеров продемонстрируем эффективное, изящное, красивое применение *теоремы Чевы*. В дальнейшем *прямую и обратную теорему Чевы* мы будем просто называть *«теоремой Чевы»*.

***Задача 1.***

Через точку *K* на медиане $AM_1$ треугольника *ABC* проведены чевианы $BB_1$ и $CC_1$ *(рис.3)*. При этом оказалось, что $BB_1 = CC_1$. Докажите, что треугольник *ABC* – равнобедренный.

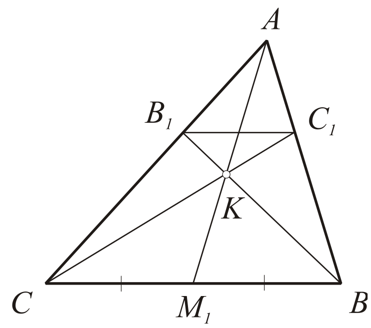

*рис.3*

*Доказательство.*

Согласно теореме Чевы выполняется равенство:

$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BM_1}{M_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Так как $BM_1 = CM_1$, то получаем:

$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB_1}{B_1C}$, что означает: $B_1C_1 \parallel BC$ (по *теореме Фалеса*).

Тогда $BC_1B_1C$ - трапеция. Но ее диагонали равны по условию: $BB_1 = CC_1$. Значит, она равнобокая и $B = C$. Таким образом, $\Delta ABC$ - равнобедренный.

***Задача 2.***

Докажите, что в произвольном треугольнике *ABC*

*а)* три медианы;

*б)* три биссектрисы

пересекаются в одной точке.

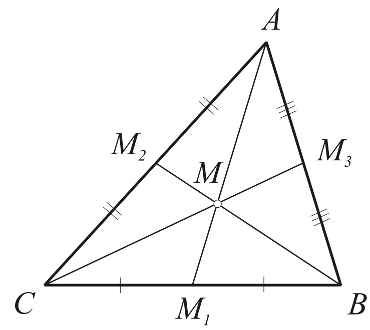

*рис.4*

*Доказательство.*

*а)* Пусть $M_1$; $M_2$; $M_3$ – середины сторон *BC, AC* и *AB* соответственно *(рис.4)*. Поскольку $AM_3 = M_3B$; $BM_1 = M_1C$; $CM_2 = M_2A$, то выполняется следующее равенство: $\frac{AM_3}{M_3B} \cdot \frac{BM_1}{M_1C} \cdot \frac{CM_2}{M_2A} = 1$. А это и означает, что медианы $AM_1$; $BM_2$; $CM_3$ пересекаются в одной точке – центроиде *M* треугольника *ABC*.

*б)* Проведем биссектрисы $AL_1; BL_2; CL_3$ в треугольнике $ABC$ *(рис.5)*.

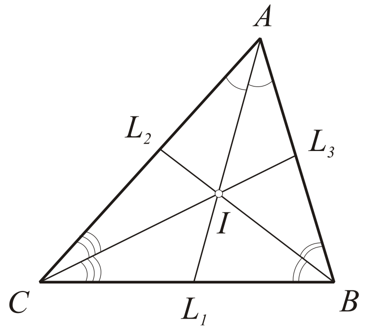

*рис.5*

Покажем, что они пересекаются в одной точке – инцентре $I$ треугольника $ABC$. Для этого надо показать, согласно *теореме Чевы*, справедливость следующего равенства:
$\frac{AL_3}{L_3B}\cdot\frac{BL_1}{L_1C}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1$ *(4)*. Но $\frac{AL_3}{L_3B}=\frac{AC}{BC}$ - по свойству биссектрисы. Аналогично $\frac{BL_1}{L_1C}=\frac{AB}{AC}$ и $\frac{CL_2}{L_2A}=\frac{BC}{AB}$.

Подставив в *(4)*, получим: $\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}=1$, что и требовалось доказать!

***Задача 3*** *(лемма о трапеции).*

В произвольной трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований принадлежат одной прямой. Докажите!

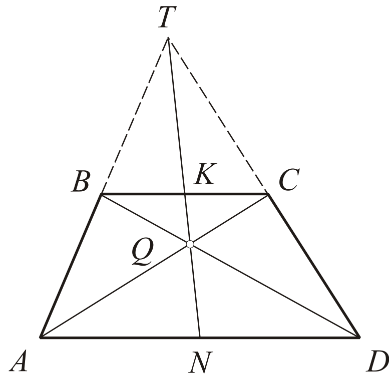

*рис.6*

*Доказательство.*

Пусть диагонали трапеции $ABCD$ $(BC||AD)$ пересекаются в точке $Q$. Пусть также $T=AB\cap DC$ *(рис.6)*. Покажем, что $N$ – точка пересечения прямых $TQ$ и $AD$ – является серединой $AD$. По *теореме Чевы* для $\Delta ATD$ и чевиан $TN$; $AC$ и $DB$ имеем:
$\frac{TC}{CD}\cdot\frac{DN}{NA}\cdot\frac{AB}{BT}=1$. Поскольку $\frac{TC}{CD}=\frac{TB}{BA}$ $(BC\parallel AD)$, то $\frac{DN}{NA}=1$, или $DN=NA$. Так как $BC\parallel AD$, то и $CK=BK$, где $K=TQ\cap BC$ . Лемма о трапеции доказана!

***Задача 4.***

Известно, что в треугольнике $ABC$ медиана $AM_1$, биссектриса $BL_2$ и высота $CH_3$ пересекаются в одной точке. Докажите, что $L_2H_3\parallel BC$.

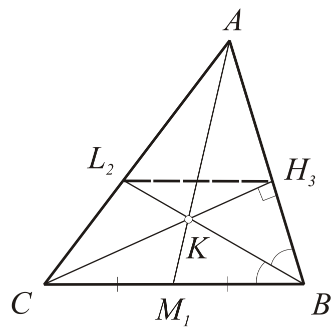

*рис.7*

*Доказательство.*

Пусть $AM_1$, $BL_2$ и $CH_3$ пересекаются в точке $K$ *(рис.7).* Тогда по *теореме Чевы* справедливо равенство: $\frac{AH_3}{H_3B}\cdot\frac{BM_1}{M_1C}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1$.

Однако $BM_1=M_1C$. Следовательно, $\frac{AH_3}{H_3B}=\frac{AL_2}{L_2C}$. А это и означает, что $L_2H_3\parallel BC$.

***Задача 5.***

Три окружности с центрами в точках $A$, $B$, $C$ попарно касаются внешним образом в точках $K$, $N$, $T$; как показано на *рис.8*. Докажите, что отрезки $AN$, $BT$ и $CK$ пересекаются в одной точке.

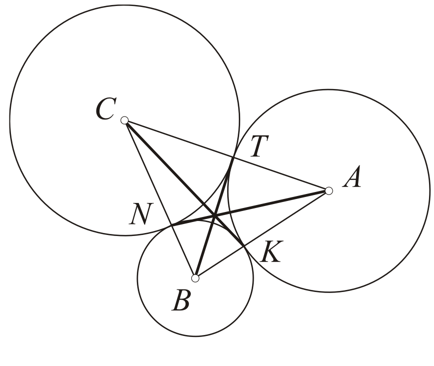

*рис.8*

*Доказательство.*

Известно, что точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры *(покажите!)*. Поэтому точки $A$, $K$, $B$ принадлежат одной прямой. Аналогично

$B$, $N$, $C$ и также $C$, $T$, $A$. Следовательно, $ABC$ – треугольник. Если мы докажем, что $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CT}{TA}=1$, то это и будет означать, что $AN$, $BT$ и $CK$ пересекаются в одной точке. Пусть окружности с центрами $A$, $B$, $C$ имеют радиусы $r_1$; $r_2$; $r_3$ соответственно. Тогда необходимо доказать, что $\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{r_3}{r_1}=1$. А это верно. Таким образом, $AN$; $BT$ и $CK$ пересекаются в одной точке.

***Задача 6.***

Внутри параллелограмма $ABCD$ на его диагонали $BD$ взята произвольная точка $K$. Проведены отрезки $KN||AB$ и $KT||AD$ *(рис.9)*. Докажите, что $AT$ и $CN$ пересекаются на диагонали $BD$.

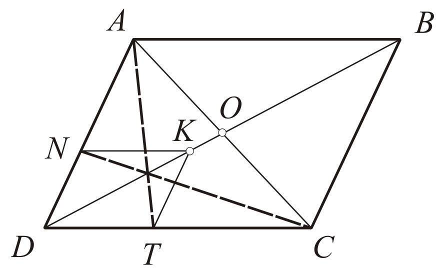


*рис.9*

*Доказательство.*

Проведем диагональ $AC$. Пусть $O=AC\cap BD$. Чтобы в $\Delta ACD$ отрезки $AT$; $CN$ и $DO$ пересекались в одной точке, необходимо выполнение условия теоремы Чевы: $\frac{AO}{OC}\cdot\frac{CT}{TD}\cdot\frac{DN}{NA}=1$. Так как $AO=OC$ (диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам), то остается доказать справедливость равенства: $\frac{CT}{TD}=\frac{AN}{ND}$ . А это верно. Действительно, $\frac{CT}{TD}=\frac{BK}{KD}$ (теорема Фалеса для треугольника $BCD$); в то же время $\frac{AN}{ND}=\frac{BK}{KD}$ (теорема Фалеса для треугольника $ABD$).

Следовательно, прямые $AT$ и $CN$ пересекаются на диагонали $BD$.

***Задача 7.***

В треугольник $ABC$ вписана полуокружность $\omega$ с центром на стороне $BC$ и касающаяся $AB$ и $AC$ в точках $K$ и $N$ соответственно *(рис.10)*. Докажите, что отрезки $BN$, $CK$ и высота $AH_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в одной точке.

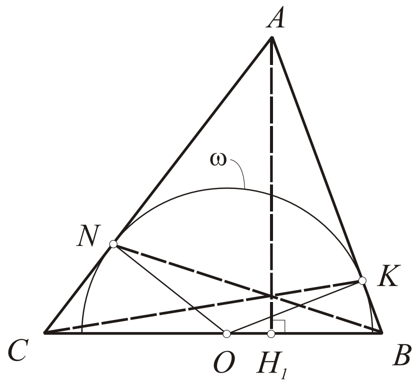


*рис.10*

*Доказательство.*

Для выполнения требования задачи согласно *теореме Чевы* должно быть выполнено следующее равенство: $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CN}{NA}=1$. Поскольку $AK=AN$ (касательные к $\omega$, проведенные из точки $A$), то остается показать, что $\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CN}{KB}=1$. Но $BH_1=AH_1\cdot\mathrm{ctg}B$ (из $\Delta AH_1B$) и $CH_1=AH_1\cdot\mathrm{ctg}C$ (из $\Delta AH_1C$). Пусть $O$ – центр полуокружности $\omega$. Тогда $OK=ON=R_\omega$, а $KB=R_\omega\cdot ctg B$ (из $\Delta OKB$); $CN=R_\omega\cdot ctg C$ (из $\Delta ONC$). Следовательно,

$$\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CN}{KB}=\frac{AH_1\cdot\mathrm{ctg}B}{AH_1\cdot\mathrm{ctg}C}\cdot\frac{R_\omega\cdot\mathrm{ctg}C}{R_\omega\cdot\mathrm{ctg}B}=1,$$ что и требовалось показать!

***Задача 8.***

Построить треугольник $ABC$ по сторонам $BC=a$, $AB=c$, если известно, что в этом треугольнике медиана $AM_1$; биссектриса $BL_2$ и высота $CH_3$ пересекаются в одной точке.

*Построение.*

Пусть $T$ – точка пересечения медианы $AM_1$, биссектрисы $BL_2$ и высоты $CH_3$ *(рис.11)*. Тогда по *теореме Чевы* выполняется равенство $\frac{AH_3}{H_3B}\cdot\frac{BM_1}{M_1C}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1$. Но $BM_1=M_1C$. Следовательно, справедливо равенство $\frac{AH_3}{H_3B}=\frac{AL_2}{L_2C}$. По свойству биссектрисы $\frac{AL_2}{L_2C}=\frac{c}{a}$, то есть $\frac{AH_3}{H_3B}=\frac{c}{a}$, или $\frac{c-H_3B}{H_3B}=\frac{c}{a}$ откуда $H_3B=\frac{ac}{a+c}$. Окружность, построенная на $BC$ как на диаметре, и засечка из точки $B$ раствором циркуля , равным $H_3B$, дадут точку $H_3$. Дальнейшее очевидно.

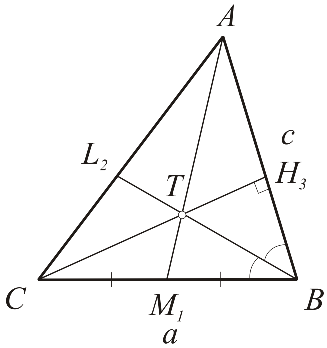


*рис.11*

***Задача 9.***

Дан треугольник $ABC$. На стороне $BC$ взята точка $D$ такая, что $\frac{BD}{CD}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^n$. Постройте на этой же стороне $BC$ точку $K$ такую, что $\frac{BK}{CK}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^{n+1}$.

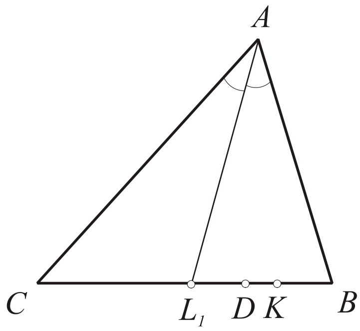


*рис.12*

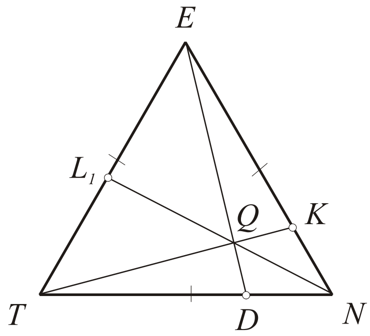


*рис.13*

*Построение.*

Проведем биссектрису $AL_1$ в $\Delta ABC$ *(рис.12)*. Тогда по свойству биссектрисы $\frac{BL_1}{CL_1}=\frac{AB}{AC}$.

Запишем требование задачи в таком виде: $\frac{BK}{CK}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^n\cdot\frac{AB}{AC}$. С учетом условия и свойства биссектрисы получим: $\frac{BK}{CK}=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{BL_1}{CL_1}$, или $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{BL_1}{CL_1}\cdot\frac{CK}{BK}=1$ *(1)*, что уже согласуется с условием теоремы Чевы. Поскольку все события в задаче происходят на стороне $BC$, то строим равносторонний $\Delta ENT$ со стороной, равной $BC$ *(рис.13)*.

На $NT$ находим точку $D$ согласно условию. На $ET$ строим точку $L_1$ согласно построению *рис.12*. Пусть $ED$ и $NL_1$ пересекаются в точке $Q$. Тогда луч $TQ$ согласно условию *(1)* пересекает $EN$ в искомой точке $K$. Так как $EN=BC$, то точка $K$ построена.

***Задача 10.***

Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами его соответствующих высот, пересекаются в одной точке.

*Доказательство.*

Пусть $M_1$; $M_2$; $M_3$ – середины сторон $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно, а $E$, $N$ и $T$ – середины соответственно высот $AH_1$; $BH_2$; $CH_3$ в $\Delta ABC$ *(рис.14)*. Очевидно, точки $E$, $N$, $T$ принадлежат соответственно средним линиям $M_2M_3$; $M_1M_3$ и $M_1M_2$ треугольника $ABC$. Чтобы $M_1E$; $M_2N$ и $M_3T$ пересекались в одной точке, необходимо выполнение условия *теоремы Чевы* для треугольника $M_1M_2M_3$:

$$\frac{M_2E}{EM_3}\cdot\frac{M_3N}{NM_1}\cdot\frac{M_1T}{TM_2}=1 \qquad (1)$$

Нетрудно показать с помощью подобия, что

$$\frac{M_2E}{EM_3}=\frac{CH_1}{H_1B};\ \frac{M_3N}{NM_1}=\frac{AH_2}{H_2C} \ \text{ и } \ \frac{M_1T}{TM_2}=\frac{BH_3}{H_3A}$$

*(покажите!)*.

Тогда равенство *(1)* идентично равенству

$$\frac{AH_2}{H_2C}\cdot\frac{CH_1}{H_1B}\cdot\frac{BH_3}{H_3A}=1.$$

Последнее равенство верно, так как высоты $AH_1$; $BH_2$; $CH_3$ пересекаются в одной точке – ортоцентре $H$. Значит, верно и равенство *(1)*, что соответствует требованиям задачи.

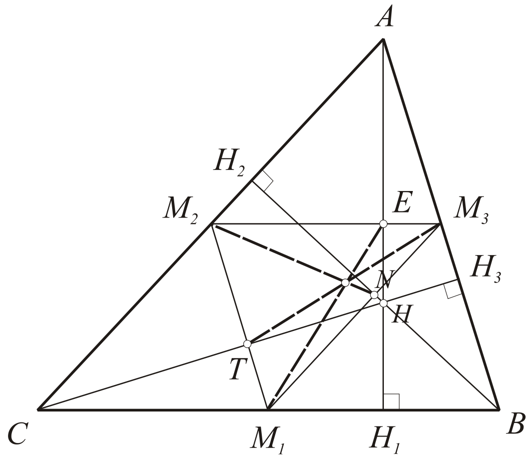


*рис.14*

***Задача 11.***

Чевианы $AA_1$; $BB_1$; $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $Q$. Через вершину $A$ проведена прямая $l \parallel BC$ *(рис.15)*. Пусть $N = A_1B_1 \cap l$ и $T = A_1C_1 \cap l$. Докажите, что $AN=AT$.

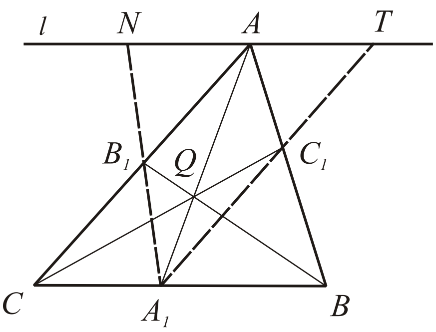


*рис.15*

<u>*Доказательство.*</u>

Подобие треугольников $NB_1A$ и $A_1B_1C$ дает следующую пропорцию: $\dfrac{AN}{A_1C}=\dfrac{AB_1}{B_1C}$, откуда $AN = A_1C\cdot\dfrac{AB_1}{B_1C}$ *(1)*.

Поскольку также $\Delta AC_1T \sim \Delta BC_1A_1$, то имеем: $\dfrac{AT}{BA_1}=\dfrac{AC_1}{C_1B}$, или $AT = BA_1\cdot\dfrac{AC_1}{C_1B}$ *(2)*.

Разделив *(1)* на *(2)*, получим:

$$\frac{AN}{AT}=\frac{A_1C}{BA_1}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1C} \quad (3).$$

Так как правая часть равенства *(3)* равна 1 по *теореме Чевы*, то $\dfrac{AN}{AT}=1$, или $AN=NT$.

***Задача 12.***

В треугольнике $ABC$ чевианы $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в точке $Q$. $A_1T$ – перпендикуляр к прямой $B_1C_1$ *(рис.16)*. Докажите, что $TA_1$ – биссектриса угла $BTC$.

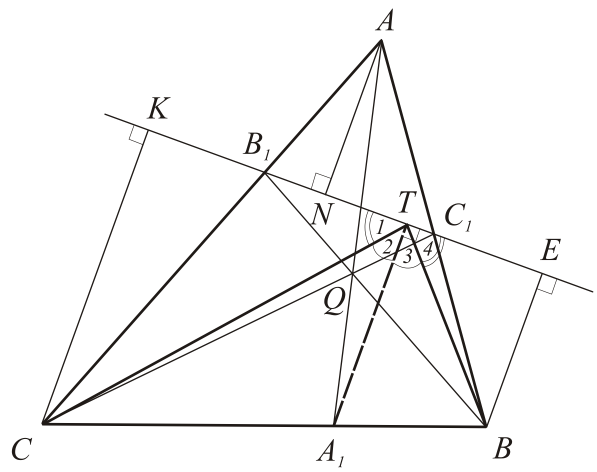


*рис.16*

<u>*Доказательство.*</u>

Обозначим соответствующие углы цифрами 1; 2; 3; 4. $\angle CTA_1=\angle 1$; $\angle BTA_1=\angle 2$; $\angle CTB_1=\angle 3$ и $\angle BTC_1=\angle 4$. Требование задачи – показать, что $\angle 1=\angle 2$. Если мы покажем, что $\angle 3=\angle 4$, то задача решена, так как $\angle 1=90°-\angle 3$ и $\angle 2=90°-\angle 4$. Итак, докажем, что $\angle 3=\angle 4$. Проведем перпендикуляры $AN$, $BE$ и $CK$ к прямой $B_1C_1$.

Тогда $\frac{AN}{BE}=\frac{AC_1}{C_1B}$ *(1)* – из подобия треугольников $ANC_1$ и $BEC_1$, $\frac{AN}{CK}=\frac{AB_1}{B_1C}$ *(2)* – так как $\Delta ANB_1 \sim \Delta CKB_1$. Согласно теореме Чевы ($AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в точке $Q$) имеем: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ или, с учетом *(1)* и *(2)* $\frac{AN}{BE}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CK}{AN}=1$, или $\frac{BE}{CK}=\frac{BA_1}{A_1C}$.

Но по теореме Фалеса $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{ET}{TK}$, откуда $\frac{BE}{CK}=\frac{ET}{TK}$. Таким образом $\Delta BET \sim \Delta CKT$ и $\angle 3=\angle 4$. А значит, $\angle 1=\angle 2$ и $TA_1$ – биссектриса угла $BTC$.

Прежде, чем перейти к задачам для самостоятельного решения, сделаем следующие замечания:

Замечание 1. Теорема Чевы остается справедливой и для внешней точки *F (рис.17)*, когда, например, точки $A_1$ и $B_1$ лежат на продолжениях сторон $CB$ и $CA$ соответственно (покажите самостоятельно).

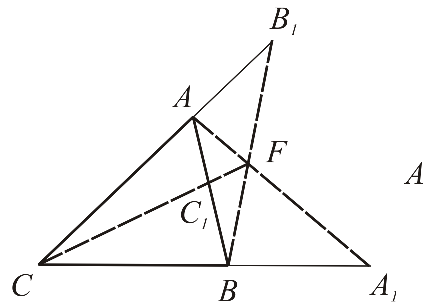


*рис.17*

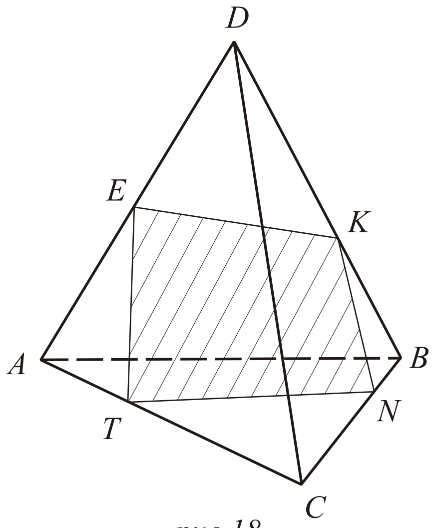


*рис.18*

Замечание 2. Как и теорема Менелая, теорема Чевы имеет свое стереометрическое обобщение (верное в обе стороны):

Чтобы через точки *E; K; N; T*, которые лежат соответственно на ребрах *DA; DB; BC; AC* тетраэдра *DABC* (или на их продолжениях), можно было провести плоскость, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$\frac{DK}{KB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CT}{TA}\cdot\frac{AE}{ED}=1$.

Доказательство пространственного обобщения *теоремы Чевы* можно найти, например, в [1] или [17].

Задачи для самостоятельного решения.

**Задача 13.** Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон со вписанной окружностью, пересекаются в одной точке (*точке Жергонна*).

**Задача 14.** Докажите, что отрезки, проходящие через вершины треугольника и делящие его периметр пополам, пересекаются в одной точке (*точке Нагеля*).

**Задача 15.** Диагонали четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *Q*. $K=AB\cap CD$, а *N* – середина *AD*. Известно, что точки *K; Q; N* лежат на одной прямой. Докажите, что *ABCD* –трапеция.

**Задача 16.** Точка *O* – центр описанной окружности остроугольного треугольника *ABC*. $K=BO\cap AC$ и $N=CO\cap AB$. При этом оказалось, что $AK=AN$. Докажите, что треугольник *ABC* – равнобедренный.

**Задача 17.** Дан прямоугольный треугольник *ABC* ($C = 90°$). На катетах *AC* и *BC* во внешнюю сторону построены квадраты *ACDN* и *CBTK*.Докажите, что *BN* и *AT* пересекаются на высоте $CH_3$ треугольника *ABC*.
**Задача 18.** Известно, что в треугольнике *ABC* высота $AH_1$, биссектриса $BL_2$ и медиана $CM_3$ пересекаются в одной точке. Докажите, что $\operatorname{tg} B = \frac{\sin A}{\cos C}$.
**Задача 19.** Пусть *Q* – произвольная точка на высоте $AH_1$ треугольника *ABC*. Пусть также $K = BQ \cap AC$ и $N = CQ \cap AB$. Докажите, что $H_1K$ и $H_1N$ образуют равные углы с высотой $AH_1$.
**Задача 20.** Стороны *AB* и *BC* треугольника *ABC* разделены на три равные части каждая ($AK = KN = NB$ и $BD = DE = EC$). Пусть $F = AE \cap CK$ и $T = AD \cap CN$. Докажите, что точки *B; T; F* и $M_2$ (середина *AC*) принадлежат одной прямой.
**Задача 21.** Три касательные к окружности образуют треугольник. Докажите, что прямые, соединяющие вершины этого треугольника с точками касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.
**Задача 22.** На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* отложили отрезок $BN = AC$. Докажите, что в треугольнике *ACN* медиана *CE*, биссектриса *AF* и высота *NT* пересекаются в одной точке.
**Задача 23.** Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке (медиана тетраэдра – это отрезок, соединяющий его вершину с центроидом противоположной грани).

# Глава 21

**Занятие 2 (2 часа)**

# Чева «со звездочкой»

Ниже вниманию читателей будут предложены несколько более сложные задачи с применением *теоремы Чевы*. Хотя вопрос о том, сложна или не очень та или иная задача, остается достаточно субъективным…

***Задача 1.***

Докажите *теорему Чевы* в ее *тригонометрической форме:*

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1 \text{ (рис.1).}$$

*Доказательство.*

Пусть стороны *BC, AC* и *AB* треугольника *ABC* соответственно равны *a; b; c*, а чевианы $AA_1$; $BB_1$; $CC_1$ пересекаются в точке *T*. По теореме синусов для $\Delta ACA_1$ получаем:

$\dfrac{CA_1}{\sin\alpha_1}=\dfrac{b}{\sin\varphi}$ *(1)*. По той же теореме для $\Delta ABA_1$: $\dfrac{A_1B}{\sin\alpha_2}=\dfrac{c}{\sin(180°-\varphi)}$ *(2)*.

Из *(1)* и *(2)* следует, что $\dfrac{CA_1}{A_1B}=\dfrac{b\sin\alpha_1}{c\sin\alpha_2}$ *(3)*.

Аналогичным образом получим: $\dfrac{AB_1}{B_1C}=\dfrac{c\sin\beta_1}{a\sin\beta_2}$ *(4)* и $\dfrac{BC_1}{C_1A}=\dfrac{a\sin\gamma_1}{b\sin\gamma_2}$ *(5)*.

Перемножив левые и правые части равенств *(3); (4); (5)*, получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}.$$

Поскольку левая часть последнего равенства равна 1 *(теорема Чевы)*, то получаем требуемое: $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$.

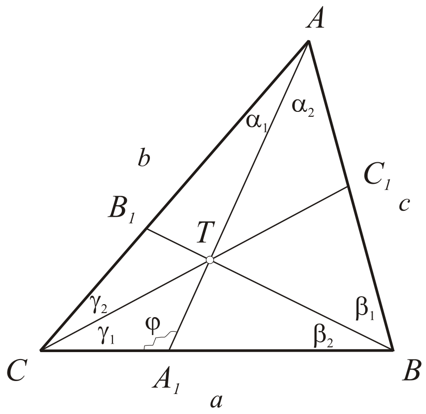


*рис.1*

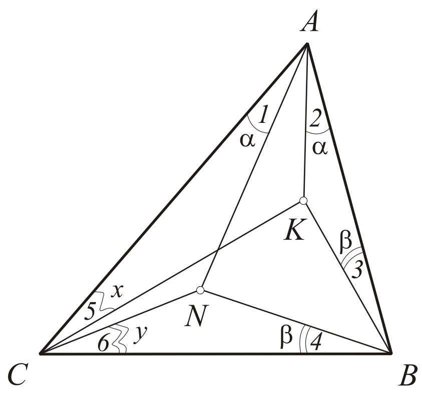


*рис.2*

***Задача 2.***

Внутри треугольника *ABC* находятся точки *K* и *N* такие, что $\angle 1=\angle 2$; $\angle 3=\angle 4$ *(рис.2)*. Докажите, что $\angle 5=\angle 6$.

*Доказательство.*

Пусть $\angle 1=\angle 2=\alpha$; $\angle 3=\angle 4=\beta$; $\angle 5=x$ и $\angle 6=y$.

Для чевиан *AK, BK, CK тригонометрическая форма теоремы Чевы* запишется так:

$$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}\cdot\frac{\sin(C-x)}{\sin x}=1 \quad (1).$$

Аналогично для чевиан *AN, BN, CN*:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin(B-\beta)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin y}{\sin(C-y)}=1 \quad (2).$$

Перемножив левые и правые части равенств *(1)* и *(2)*, получим:

$$\frac{\sin(C-x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin y}{\sin(C-y)}=1, \text{ или } \sin x\cdot\sin(C-y)=\sin y\cdot\sin(C-x).$$

Превратив произведения синусов в сумму, после сокращения получим:

$$\cos(x+C-y)=\cos(y+C-x), \text{ откуда } x=y.$$

***Задача 3.***

Дан равнобедренный треугольник *ABC* с углом $A=110°$. Внутри него находится точка *T* такая, что $\angle TBC=30°$; $\angle TCB=25°$. Найдите величину $\angle ATC=\varphi$.

<u>*Решение.*</u>

Пусть $\angle TAC=x$, тогда $\angle TAB=110°-x$ *(рис.3)*. Очевидно, $\angle TBA=5°$ и $\angle TCA=10°$. Согласно *тригонометрической форме теоремы Чевы* для чевиан *AT, BT* и *CT* имеем:

$\dfrac{\sin x}{\sin(110°-x)}\cdot\dfrac{\sin 5°}{\sin 30°}\cdot\dfrac{\sin 25°}{\sin 10°}=1$. С учетом того, что $\sin 30°=\dfrac{1}{2}$ и $\sin 10°=2\sin 5°\cdot\cos 5°$, получим: $\sin x\cdot\sin 25°=\sin(110°-x)\cdot\cos 5°$, или

$\dfrac{1}{2}(\cos(x-25°)-\cos(x+25°))=\dfrac{1}{2}(\sin(115°-x)+\sin(105°-x))$. Поскольку

$\sin(115°-x)=\cos(25°-x)=\cos(x-25°)$, а $\sin(105°-x)=\cos(15°-x)$, получим следующее равенство: $\cos(x+25°)+\cos(15°-x)=0$, или $2\cos 20°\cdot\cos(x+5°)=0$, откуда $x=85°$.

Тогда из $\Delta ATC$: $\varphi=180°-85°-10°=85°$.

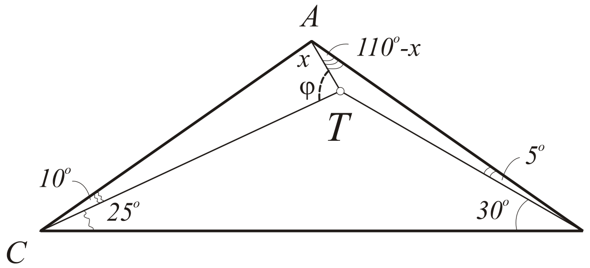


*рис.3*

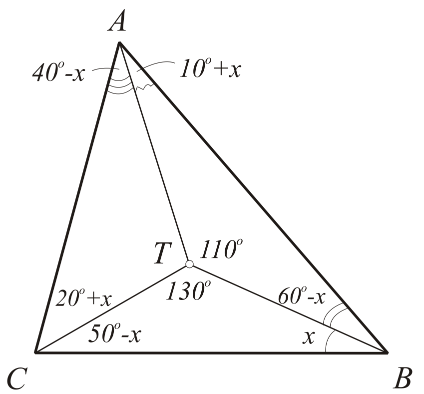


*рис.4*

***Задача 4.***

Дан треугольник *ABC* со следующими углами: $A=50°$; $B=60°$; $C=70°$. Точка *T* внутри треугольника *ABC* такова, что $\angle ATB=110°$; $\angle BTC=130°$. Найдите величину угла *TBC*.

<u>*Решение.*</u>

Обозначим искомый $\angle TBC$ через *x (рис.4)*. Нетрудно тогда подсчитать, что $\angle TBA=60°-x$; $\angle TAB=10°+x$; $\angle TAC=40°-x$; $\angle TCB=50°-x$ и $\angle TCA=20°+x$.

*Тригонометрическая форма теоремы Чевы* для чевиан *AT, BT, CT* будет в таком случае выглядеть так:

$$\frac{\sin(40^\circ - x)}{\sin(10^\circ + x)} \cdot \frac{\sin(60^\circ - x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin(50^\circ - x)}{\sin(20^\circ + x)} = 1 \quad (1).$$

При этом, очевидно, искомый угол $x < 40^\circ$ (точка $T$ внутри треугольника и $\angle TAC = 40^\circ - x$). Согласно равенству *(1)* имеем:

$$\sin(40^\circ - x) \cdot \sin(60^\circ - x) \cdot \sin(50^\circ - x) = \sin x \cdot \sin(10^\circ + x) \cdot \sin(20^\circ + x) \quad (2).$$

Нетрудно заметить, что левая часть равенства *(2)* является убывающей функцией, а правая – возрастающей. Следовательно, уравнение *(2)* имеет не более одного решения. Его можно подобрать: $x = 20^\circ$.

***Задача 5.***

Из точки $A$ вне окружности $\omega$ проведены $AB$ и $AC$ – касательные к ней. А также произвольные секущие $A - D - E$ и $A - K - N$ *(рис.5)*. Докажите, что $DN$, $KE$ и $BC$ пересекаются в одной точке.

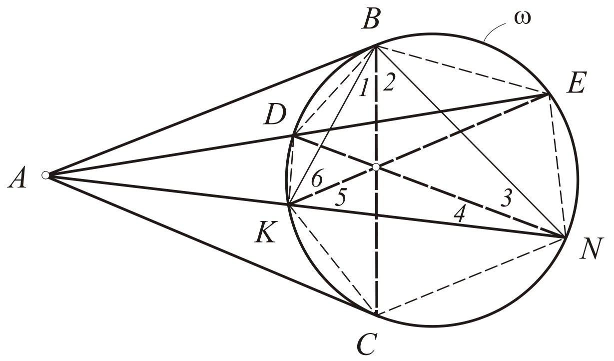


*рис.5*

<u>*Доказательство.*</u>

Обозначим цифрами от 1 до 6 соответствующие углы на *рис.5*.

Если для $\Delta BNK$ будет выполнена *тригонометрическая форма* теоремы Чевы: $\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2} \cdot \frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4} \cdot \frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 6} = 1$ *(1)*, то это и будет означать, что $DN$, $KE$ и $BC$ пересекаются в одной точке. Заметим, что синусы указанных углов пропорциональны соответствующим хордам. Действительно, $KC = 2R_\omega \cdot \sin\angle 1$; $CN = 2R_\omega \cdot \sin\angle 2$ и так далее. Тогда доказать равенство *(1)* – это все равно, что доказать равенство *(2)*: $\frac{KC}{CN} \cdot \frac{BD}{DK} \cdot \frac{EN}{BE} = 1$ *(2)*.

Покажем, что равенство *(2)* верно.

Так как $\Delta ABD \sim \Delta AEB$ (по двум углам), то $\frac{BD}{BE} = \frac{AB}{AE}$ *(3)*. Аналогично $\Delta ACK \sim \Delta ANC$ и $\frac{KC}{CN} = \frac{AK}{AC}$ *(4)*. Из подобия $\Delta AEN$ и $\Delta AKD$ получим: $\frac{EN}{DK} = \frac{AE}{AK}$ *(5)*. Перемножив левые и правые части равенств *(3); (4); (5)* и учтя то, что $AC = AB$ (касательные к $\omega$), получим требуемое: $\frac{KC}{CN} \cdot \frac{BD}{DK} \cdot \frac{EN}{BE} = 1$.

***Задача 6.***

Пользуясь только линейкой, из точки $A$ вне окружности $\omega$ проведите касательную к ней.

<u>*Решение.*</u>

Воспользовавшись результатом *задачи 5*, нам не составит труда это сделать.

Проведем сначала две пары произвольных секущих ( $A-D-E$ и $A-K-N$); ( $A-F-G$ и $A-L-M$ ). Затем через точки *T* и *Q* пересечения соответствующих хорд проведем прямую, пересекающую окружность $\omega$ в точках *B* и *C* *(рис.6)*. *AB* и *AC* – искомые касательные.

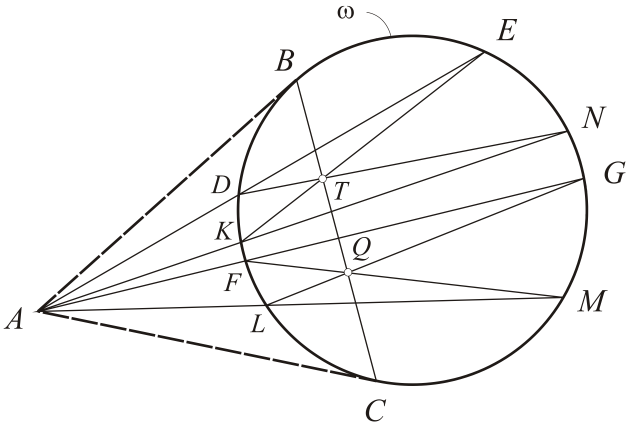


*рис.6*

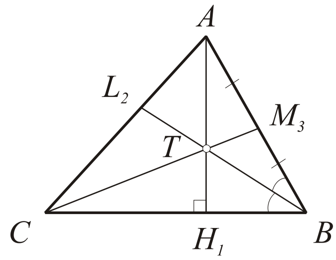


*рис.7*

***Задача 7.***

В остроугольном треугольнике *ABC* высота $AH_1$; биссектриса $BL_2$ и медиана $CM_3$ пересекаются в одной точке. Докажите, что $B > 45°$.

*Доказательство.*

Пусть $AH_1$; $BL_2$ и $CM_3$ пересекаются в точке *T (рис.7).* Тогда по *теореме Чевы* имеем: $\frac{AM_3}{M_3B}\cdot\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1$. Но $AM_3 = M_3B$; $\frac{CL_2}{L_2A}=\frac{BC}{AB}$ (по свойству биссектрисы), а $BH_1 = AB\cdot\cos B$ (из $\Delta ABH_1$) и $CH_1 = AC\cdot\cos C$ (из $\Delta ACH_1$).

Получаем: $\frac{AB\cdot\cos B}{AC\cdot\cos C}\cdot\frac{BC}{AB}=1$.

Учитывая, что $BC = 2R\cdot\sin A$ и $AC = 2R\cdot\sin B$, получим следующее:

$\sin A\cdot\cos B = \sin B\cdot\cos C$, или $\operatorname{tg} B = \frac{\sin A}{\cos C}$.

Пусть $\operatorname{tg} B < 1$. Тогда $\sin A < \cos C$, или $\sin A < \sin(90° - C)$. Так как функция синус при острых углах возрастает, то $A < 90° - C$, или $A + C < 90°$. Значит, $B > 90°$; что противоречит условию ( $\Delta ABC$ - остроугольный). Следовательно, наше допущение неверно и $\operatorname{tg} B > 1$, то есть $B > 45°$.

***Задача 8.***

Из произвольной точки *T* внутри треугольника *ABC* проведены перпендикуляры *TD, TE* и *TF* соответственно к сторонам *BC, AC* и *AB (рис.8). $A_1$* - середина *TA, $A_2$* - середина *EF*. Аналогично получены точки $B_1$ и $B_2$; $C_1$ и $C_2$. Докажите, что прямые $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ пересекаются в одной точке.

*Доказательство.*

*TA* – диаметр окружности, описанной около четырехугольника *AETF* *(* $\angle AET = \angle AFT = 90°$ *)*. Значит, $A_1$ - центр этой окружности. Тогда $A_1A_2$ – серединный перпендикуляр к *EF*. Аналогично $B_1B_2$ и $C_1C_2$ – серединные перпендикуляры к *FD* и *DE* соответственно. А серединные перпендикуляры к сторонам $\Delta DEF$ пересекаются в одной точке – центре описанной около этого треугольника окружности.

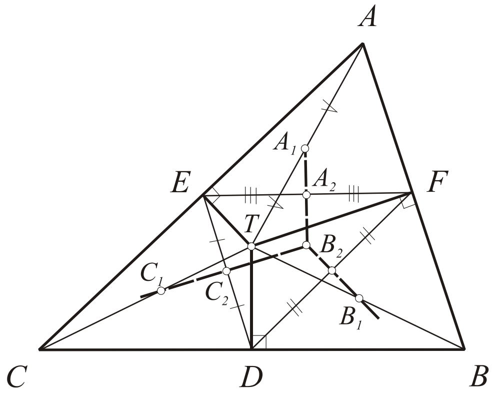


*рис.8*

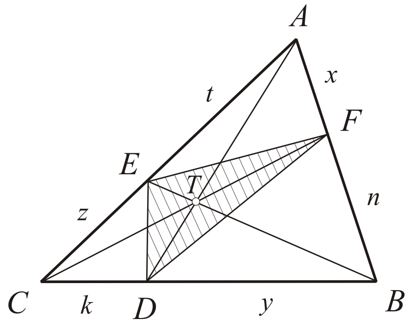


*рис.9*

***Задача 9.***

Чевианы *AD; BE; CF* треугольника *ABC* пересекаются в точке *T* внутри треугольника. Докажите, что площадь $S_T$ чевианного треугольника *DEF* вычисляется по формуле

$S_T = \dfrac{xyz}{2R}$, где *R* – радиус описанной окружности $\Delta ABC$; $AF = x$; $BD = y$; $CE = z$ *(рис.9)*.

<u>*Доказательство.*</u>

Введем следующие обозначения: $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$; $BF = n$; $DC = k$; $EA = t$.

Очевидно, $xyz = nkt$ *(1)* – по *теореме Чевы.* Пусть также $S_{ABC} = S$; $S_{AEF} = S_1$; $S_{BFD} = S_2$ и $S_{DCE} = S_3$.При этом $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{xt}{bc}$ (треугольники *AEF* и *ABC* имеют общую вершину *A*).

Аналогично $\dfrac{S_2}{S} = \dfrac{ny}{ac}$ и $\dfrac{S_3}{S} = \dfrac{kz}{ab}$. Тогда $S_T = S\left(1 - \dfrac{xt}{bc} - \dfrac{ny}{ac} - \dfrac{kz}{ab}\right) = S\left(\dfrac{abc - axt - bny - ckz}{abc}\right)$.

Поскольку $a = k + y$; $b = z + t$ и $c = x + n$, находим значение выражения $abc - axt - bny - ckz$. После упрощений получаем: $abc - axt - bny - ckz = xyz + nkt = 2xyz$ - с учетом равенства *(1)*.

Итак, $S_T = S \cdot \dfrac{2xyz}{abc}$. С учетом формулы $S = \dfrac{abc}{4R}$ получаем требуемое: $S_T = \dfrac{xyz}{2R}$.

***Задача 10.***

$AL_1; BL_2; CL_3$ - биссектрисы в треугольнике *ABC*. $K = BL_2 \cap L_1L_3$ и $N = CL_3 \cap L_1L_2$ *(рис.10)*. Докажите, что биссектриса угла *A* треугольника *ABC* является также биссектрисой $\angle NAK$, или что $x = y$.

<u>*Доказательство.*</u>

Пусть лучи *AN* и *AK* пересекают сторону *BC* соответственно в точках *D* и *E*. Пусть также $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ и $AL_1 = l_a$. Обозначим $\angle ADB = \varphi$, тогда $\angle ADC = 180° - \varphi$. По теореме синусов для $\Delta ADL_1$ имеем: $\dfrac{DL_1}{\sin x} = \dfrac{l_a}{\sin \varphi}$, откуда $\sin x = \dfrac{DL_1 \cdot \sin \varphi}{l_a}$ *(1)*. По этой же теореме для $\Delta ACD$: $\dfrac{CD}{\sin\left(\dfrac{A}{2} - x\right)} = \dfrac{b}{\sin(180° - \varphi)}$, откуда $\sin\left(\dfrac{A}{2} - x\right) = \dfrac{CD \cdot \sin \varphi}{b}$ *(2)*.

Разделив *(1)* на *(2)*, получим: $\dfrac{\sin x}{\sin\left(\dfrac{A}{2} - x\right)} = \dfrac{DL_1}{CD} \cdot \dfrac{b}{l_a}$ *(3)*.

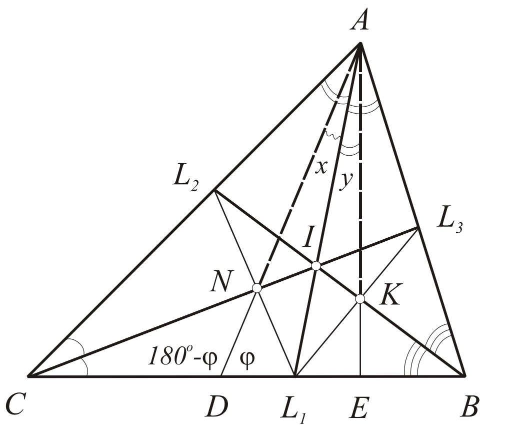


*рис.10*

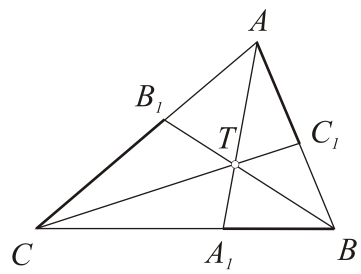


*рис.11*

*По теореме Чевы* для $\Delta ACL_1$: $\frac{DL_1}{CD}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}\cdot\frac{AI}{IL_1}=1$. С учетом того, что $\frac{CL_2}{L_2A}=\frac{a}{c}$ (свойство биссектрисы), получим $\frac{DL_1}{CD}=\frac{c}{a}\cdot\frac{IL_1}{AI}$ *(4)*.

Подставим *(4)* в *(3)*. Тогда $\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{A}{2}-x\right)}=\frac{bc}{al_a}\cdot\frac{IL_1}{AI}$ *(5)*.

Аналогично записав теоремы синусов для $\Delta AEL_1$ и $\Delta ABE$, а также *теорему Чевы* для $\Delta ABL_1$, получим: $\frac{\sin y}{\sin\left(\frac{A}{2}-y\right)}=\frac{bc}{al_a}\cdot\frac{IL_1}{AI}$ *(6)*.

Тогда из *(5)* и *(6)* следует: $\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{A}{2}-x\right)}=\frac{\sin y}{\sin\left(\frac{A}{2}-y\right)}$.

Рассмотрим функцию $f(\alpha)=\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$.

$$f^{/}(\alpha)=\frac{\cos\alpha\cdot\sin(\varphi-\alpha)-\cos(\varphi-\alpha)\cdot(-1)\sin\alpha}{\sin^2(\varphi-\alpha)}=\frac{\sin\varphi}{\sin^2(\varphi-\alpha)}.$$

Так как $0<\varphi<180^\circ$, то $\sin\varphi>0$ и $f`(\alpha)>0$.

Таким образом, функция $f(\alpha)$ строго возрастает и, следовательно, достигает каждого своего значения только при одном и том же значении $\alpha$. Значит, $x=y$, что и требовалось доказать!..

***Задача 11.***

Дан треугольник *ABC* со сторонами *a, b, c*. Через произвольную точку внутри него проводятся чевианы $AA_1; BB_1; CC_1$. Найдите среди этих точек точку *T* такую, для которой произведение $AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1$ было бы максимальным *(рис.11)*.

*Решение.*

По *теореме Чевы* $AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1=C_1B\cdot A_1C\cdot B_1A$ *(1)*.

Согласно *неравенству Коши* $\sqrt{AC_1\cdot C_1B}\le\frac{AC_1+C_1B}{2}=\frac{c}{2}$ *(2)*.

Аналогично и $\sqrt{BA_1\cdot A_1C}\le\frac{BA_1+A_1C}{2}=\frac{a}{2}$ *(3)* и $\sqrt{CB_1\cdot B_1A}\le\frac{CB_1+B_1A}{2}=\frac{b}{2}$ *(4)*.

Перемножив левые и правые части неравенств *(2); (3); (4)*. С учетом равенства *(1)* получим: $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 \le \dfrac{abc}{8}$. Очевидно, равенство будет иметь место, когда точки $A_1; B_1; C_1$ будут совпадать с серединами соответствующих сторон. Тогда точка *T* совпадет с центроидом треугольника *ABC* ($T \equiv M$). При этом само максимальное значение произведения $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1$ будет равно $\dfrac{abc}{8}$.

Несколько задач «со звездочкой» (на наш взгляд) с применением *теоремы Чевы* предложим решить самостоятельно.

**Задача 12.** Докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке (*симедианой* называется прямая, симметричная медиане треугольника относительно биссектрисы того же угла).

**Задача 13.** В равнобедренном треугольнике *ABC* ($AB = AC$) угол *A* равен $80°$. Внутри $\Delta ABC$ взята точка *T* такая, что $\angle TBC = 30°$, а $\angle TCB = 10°$. Найдите величину угла *ATC*.

**Задача 14.** *ABCDEF* – вписанный в окружность шестиугольник. Известно, что выполняется равенство: $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$. Докажите, что в таком случае *AD, BE* и *CF* пересекаются в одной точке.

**Задача 15.** *D* – точка на гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC*. $O_1$ и $O_2$ - соответственно центры описанных окружностей треугольников *ACD* и *BCD*. Пусть $N = AO_2 \cap BO_1$. Докажите, что $\angle BCN = \angle ACD$.

**Задача 16.** В треугольник *ABC* вписана окружность. На ее радиусах, проведенных в точки касания, взяты точки на равных расстояниях от центра и соединены с противоположными вершинами. Докажите, что три получившиеся таким образом прямые пересекаются в одной точке.

**Задача 17.** *ABCD* – выпуклый четырехугольник с равными углами *B* и *D*. $AK \perp BC$ ($K \in BC$) и $AN \perp CD$ ($N \in CD$). $T = DK \cap BN$. Докажите, что $AT \perp KN$.

**Задача 18.** Через произвольную точку внутри треугольника *ABC* проводятся чевианы $AA_1; BB_1; CC_1$. Докажите, что площадь чевианного $\Delta A_1B_1C_1$ не превышает $\dfrac{1}{4}$ площади треугольника *ABC*.

**Задача 19.** *(теорема Максвелла)* Внутри треугольника *ABC* взята произвольная точка *T*. Построен треугольник *DEF* со сторонами, параллельными отрезкам *TA, TB, TC*. Через вершины треугольника *DEF* проведены прямые параллельно сторонам треугольника *ABC*. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

**Задача 20.** Точка *T* внутри треугольника *ABC* такова, что $\angle ATB - C = \angle ATC - B$. Пусть $I_1$ и $I_2$ - соответственно центры окружностей, вписанных в треугольники *ABT* и *ACT*. Докажите, что прямые *AT;* $BI_1$ и $CI_2$ пересекаются в одной точке.