В главной роли – отрезок AI!

Мы поведем наш разговор о замечательном отрезке AI, связывающем вершину треугольника ABC с его инцентром (точкой пересечения биссектрис). Этот отрезок обладает целым рядом важных свойств. Формулы отрезка AI востребованы при решении геометрических задач. Отрезок AI активно участвует в современных олимпиадных конструкциях. Поэтому пора, не теряя ни минуты ☺, перейти к рассмотрению и решению AI-задач!..

Задача 1.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Какой из отрезков больше: AI или IL?

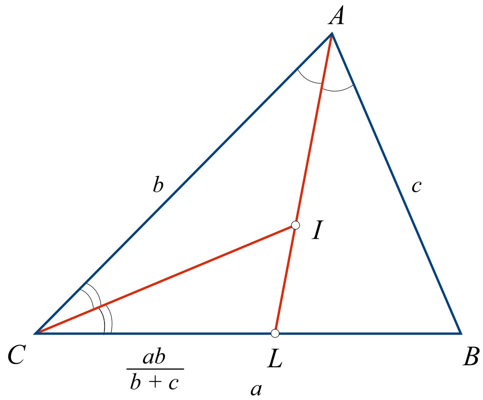

рис.1

Решение.

Пусть $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ – стороны треугольника ABC. Докажем лемму, которая восходит к Архимеду: $\frac{AI}{IL} = \frac{b+c}{a}$. По свойству биссектрисы: $\frac{b}{c} = \frac{CL}{BL} = \frac{CL}{a-CL}$, откуда $CL = \frac{ab}{b+c}$ *(рис.1)*. Поскольку CI – биссектриса в треугольнике ACL, то вновь – согласно свойству биссектрисы – получаем: $\frac{AI}{IL} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$. Тогда $AI > IL$, так как $b + c > a$ *(неравенство треугольника)*.

Задача 2.

Пусть биссектриса угла A при продолжении пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке W. Докажите справедливость формулы $\boxed{AI \cdot IW = 2Rr}$ (R и r – соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC).

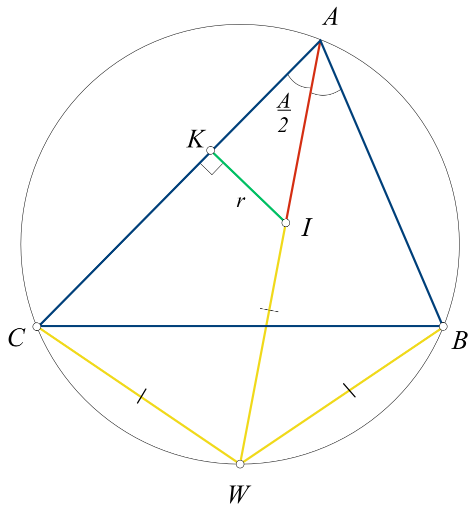

рис.2

Доказательство.

Проведем $IK = r$ *(рис.2)*. Тогда из ΔAIK получаем: $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$. По теореме синусов для ΔABW: $\frac{BW}{\sin\frac{A}{2}} = 2R$ (точки A; B; W лежат на описанной окружности ΔABC).

Так как $BW = IW$ *(теорема «трилистника»)*, то $IW = BW = 2R \cdot \sin\frac{A}{2}$. В таком случае $AI \cdot IW = 2Rr$.

<u>Замечание.</u> Обозначив через O центр описанной окружности треугольника ABC и воспользовавшись тем, что также $AI \cdot IW = (R - OI)(R + OI)$ – теорема о произведении отрезков хорд, – мы получим *формулу Эйлера:* $\boxed{OI^2 = R^2 - 2Rr}$.

Задача 3.

Биссектрисы углов B и C треугольника ABC при продолжении пересекают его описанную окружность в точках P и Q *(рис.3)*. Докажите, что отрезок PQ совпадает с серединным перпендикуляром к AI.

Доказательство.

Так как $\angle 1 = \angle QCB = \frac{C}{2}$ – вписанные, опираются на одну дугу, и $\angle 2 = \angle ACQ = \frac{C}{2}$ (аналогично), то PQ – биссектриса $\angle API$. Но $PA = PI$ *(теорема «трилистника»)*. Следовательно, PQ совпадает с высотой, медианой и биссектрисой в равнобедренном ΔAPI, что соответствует требуемому.

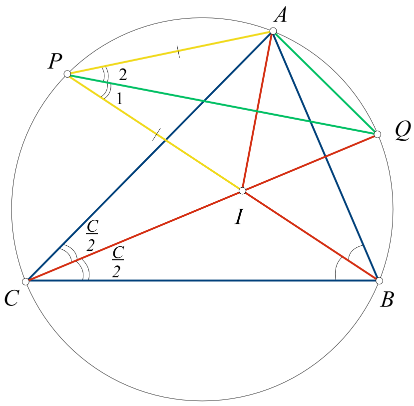

рис.3

Задача 4.

Пусть I_a – центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон. Докажите, что $\boxed{AI \cdot AI_a = bc}$.

Доказательство.

В треугольнике AIB углы такие: $\frac{A}{2}$; $\frac{B}{2}$; $90° + \frac{C}{2}$. Поскольку $\angle ACI_a = C + 90° - \frac{C}{2} = 90° + \frac{C}{2}$, то у треугольника ACI_a такие же углы *(рис.4)*. $\Delta AIB \sim \Delta ACI_a$ и, следовательно, $\frac{b}{AI} = \frac{AI_a}{c}$, откуда $AI \cdot AI_a = bc$.

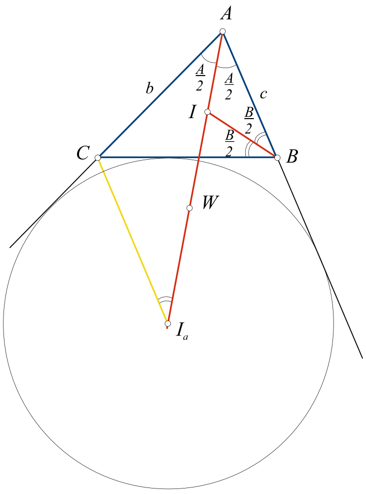

рис.4

Задача 5.

Докажите, что в произвольном треугольнике ABC верна формула $\boxed{AI^2 = bc - 4Rr}$.

Доказательство.

Так как $BW = CW = IW = I_aW$ – теорема Мансиона, то $AI^2 = AI \cdot (AI_a - II_a) = AI \cdot AI_a - AI \cdot II_a$. Но $AI \cdot AI_a = bc$ *(задача 4)*, а $AI \cdot II_a = AI \cdot 2IW = 2AI \cdot IW = 4Rr$ *(задача 2)*. Тогда $AI^2 = bc - 4Rr$.

Задача 6.

В остроугольном треугольнике ABC высота AH_1 пересекает биссектрисы BL_2 и CL_3 в точках D и F соответственно. Окружность q описана около треугольника IFD. Докажите, что AI – касательная к окружности q *(рис.5)*.

Доказательство.

Очевидно, $\angle H_1BD = \frac{B}{2}$ (BL_2 – биссектриса). Тогда $\angle H_1DB = 90° - \frac{B}{2}$ (из ΔH_1DB). Вертикальный с ним $\angle IDF = 90° - \frac{B}{2}$. Угол AIC при инцентре равен $90° + \frac{B}{2}$. А смежный с ним $\angle AIF = 90° - \frac{B}{2}$. Поскольку $\angle AIF = \angle IDF$, то AI – касательная к окружности q.

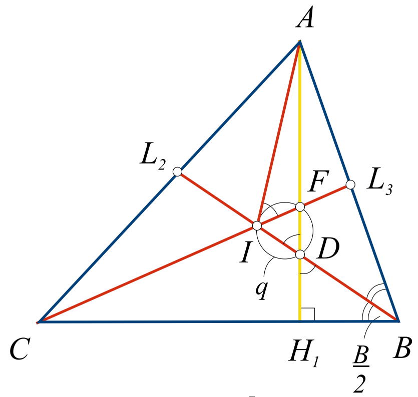

рис.5

Задача 7.

В треугольнике *ABC* отрезок *AI* перпендкулярен *OI* (*O* – центр описанной окружности треугольника *ABC*). Найдите соотношение между сторонами этого треугольника.

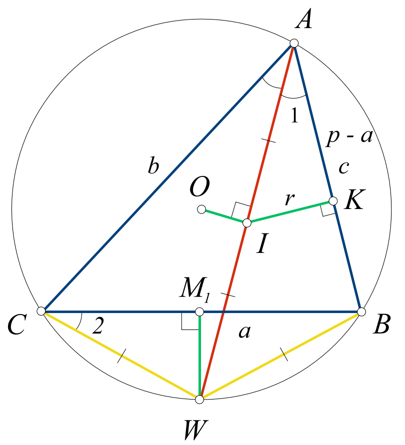

рис.6

Решение.

Продолжим луч *AI* до пересечения с описанной окружностью в точке *W (рис.6)*. Тогда *AI* = *IW* (диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам).

По теореме «трилистника» *IW* = *BW* = *CW*. Проведем *IK* = *r*, при этом *AK* = *p* – *a (покажите!)*. Заметим, что $\Delta AIK = \Delta CM_1W$ (M_1 – середина *BC*). Действительно, *AI* = *CW* и $\angle 1 = \angle 2 = \frac{A}{2}$ – вписанные, опираются на одну дугу. Следовательно, CM_1 = *AK*, или $\frac{a}{2} = p - a$. Откуда 2*p* = 3*a*; *a* + *b* + *c* = 3*a* и $\boxed{b + c = 2a}$.

<u>Замечание.</u> Такой треугольник называют *разностным* (*a* – средняя сторона).

Задача 8.

В остроугольном треугольнике *ABC* угол *A* = 60°, а угол *C* = *γ*. Докажите, что из ортоцентра *H* отрезок *AI* виден под углом, равным 1,5γ.

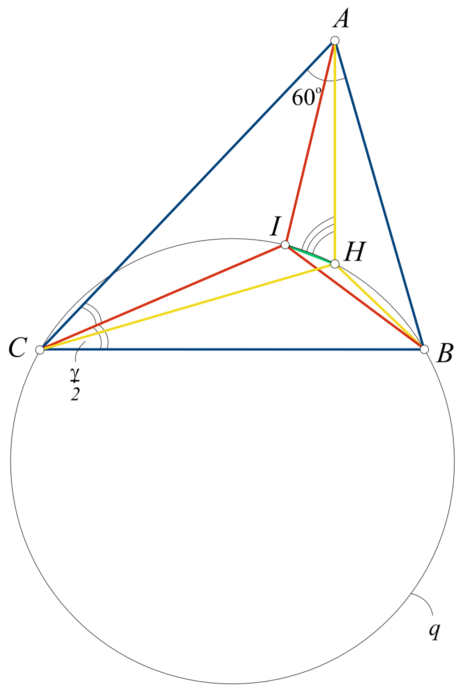

рис.7

Доказательство.

Углы при ортоцентре *H* равны:

$\angle BHC = 180° - A = 120°$ и $\angle AHB = 180° - \gamma$ *(покажите!)*. $\angle BIC = 90° + \frac{A}{2} = 90° + 30° = 120°$.

Так как $\angle BHC = \angle BIC = 120°$, то точки *B, H, I, C* лежат на одной окружности *q (рис.7)*. Тогда, поскольку $\angle BCI = \frac{\gamma}{2}$, то $\angle BHI = 180° - \frac{\gamma}{2}$ и

$\angle AHI = 360° - (180° - \gamma) - \left(180° - \frac{\gamma}{2}\right) = 1{,}5\gamma$.

Задача 9.

Точки *O* и *H* – соответственно центр описанной окружности остроугольного треугольника *ABC* и его ортоцентр. Известно, что $AI \perp IH$. Докажите, что *OI* || *BC*.

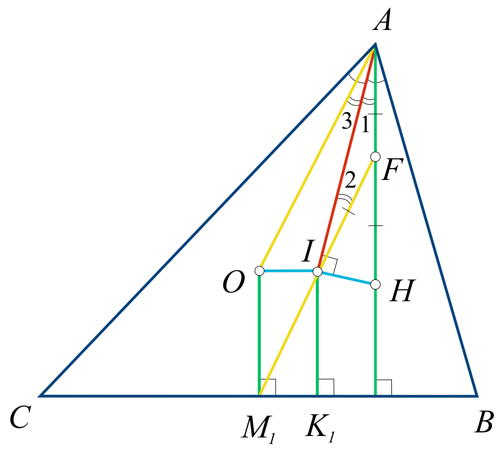

рис.8

Доказательство.

Пусть точка *F* – середина *AH (рис.8)*. Тогда *IF* – медиана, проведенная к гипотенузе в Δ*AIH*, то есть *IF* = *AF* = *FH* и $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 1 = \angle 3$, поскольку биссектриса угла *A* является также биссектрисой угла *OAH (покажите!)*. Следовательно, *IF* || *AO* ($\angle 2 = \angle 3$). Но и M_1F || *AO* (так как OM_1||*AF* и OM_1 = *AF*, то есть AOM_1F – параллелограмм). Значит, M_1 – *I* – *F* – одна прямая. Известно, что луч M_1I на высоте AH_1 отсекает отрезок, равный радиусу вписанной окружности r *(покажите!)*. В таком случае $AF = r$ и $OM_1 = AF = r$. Так как $OM_1 = IK_1 = r$, то $OI \parallel BC$.

Задача 10.

Окружность ω описана около треугольника ABC. Окружность q касается ω, стороны BC и биссектрисы угла A в точке T. Докажите, что отрезок AT совпадает с отрезком AI.

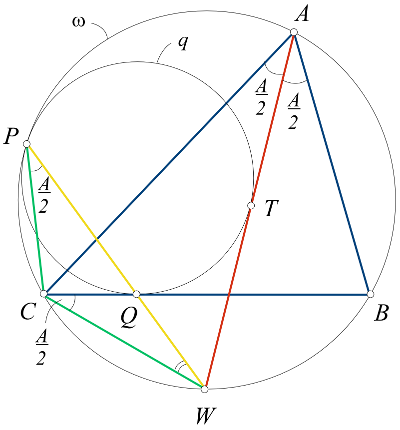

рис.9

Доказательство.

Пусть P и Q – точки касания окружности q с ω и BC соответственно. Пусть также биссектриса угла A при продолжении пересекает ω в точке W *(рис.9)*. Согласно *лемме Архимеда* $P – Q – W$ – одна прямая *(покажите!)*. $\Delta PWC \sim \Delta CWQ$ ($\angle CWQ$ – общий и $\angle CPW = \angle QCW$ – вписанные, опираются на равные дуги). Тогда $\frac{CW}{QW} = \frac{PW}{CW}$, или $\boxed{CW^2 = PW \cdot QW}$. Но и $WT^2 = PW \cdot QW$ – по теореме о квадрате касательной. Значит, $WT = WC$ и $T \equiv I$ *(согласно теореме «трилистника»)*.

Задача 11.

Точка K внутри треугольника ABC такова, что $\angle KBA + \angle KCA = \angle KBC + \angle KCB$. Какой из отрезков больше: AI или AK?

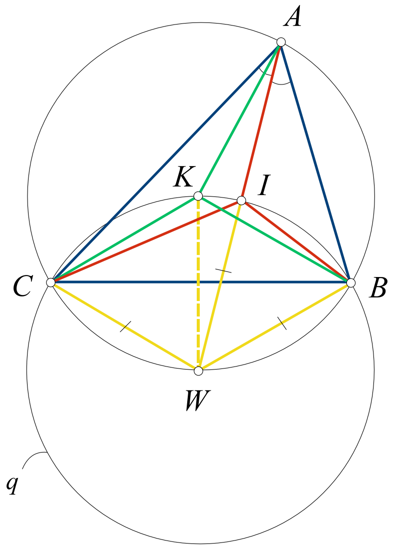

рис.10

Решение.

Согласно условию, $\angle KBC + \angle KCB = \frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$ *(рис.10)*. Значит, $\angle BKC = 90° + \frac{A}{2}$. Но и $\angle BIC = 90° + \frac{A}{2}$. Тогда точки B, I, K, C лежат на одной окружности q. Центр описанной окружности ΔBIC – точка W, так как $WB = WI = WC$ *(теорема «трилистника»)*. В таком случае $WI = WK = R_q$. По неравенству треугольника для ΔAKW: $AK + KW \geq AW = AI + IW$. С учетом того, что $KW = IW$, получаем: $AK \geq AI$. Знак равенства имеет место в случае, когда $K \equiv I$.

Задача 12.

Точка P – середина дуги BAC описанной окружности ω треугольника ABC. Луч PI вторично пересекает ω в точке K. Окружность q описана около треугольника AL_1K (AL_1 – биссектриса). Она пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что $\angle AIQ = 90°$.

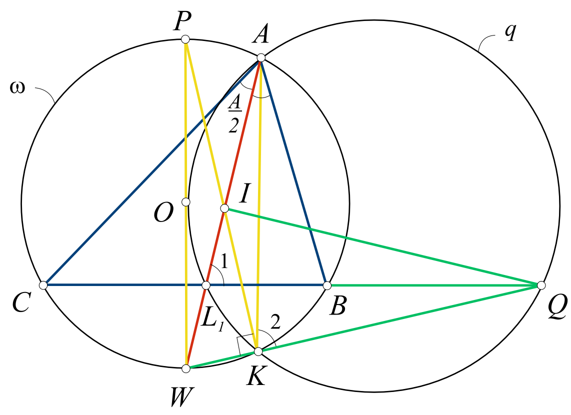

рис.11

Доказательство.

Пусть биссектриса AL_1 при продолжении пересекает описанную окружность ω в точке W *(рис.11)*. Тогда PW – диаметр ω (P и W – середины соответствующих дуг) и $\angle PKW = 90°$. $\angle 1 = C + \frac{A}{2}$ – внешний для ΔACL_1. Значит, и $\angle 2 = \angle AKQ = C + \frac{A}{2}$ – вписанные, опираются на одну дугу в окружности q. Угол C опирается на дугу AB, угол BAW – на дугу $B – K – W$ и угол AKP – на дугу AP. Все вместе – на дугу $P – A – B – K – W$, равную 180°. Тогда $\angle 2 + \angle AKP = C + \frac{A}{2} + 90° - C - \frac{A}{2} = 90°$ (половине дуги) и, следовательно $W – K – Q$ – одна прямая.

Рассмотрим подобие ΔBWL_1 и ΔAWB (у них по углу $\frac{A}{2}$ и $\angle L_1WB$ – общий) – *рис.12*. Из подобия получаем пропорцию: $\frac{BW}{AW} = \frac{L_1W}{BW}$, или $BW^2 = AW \cdot L_1W$. Заменим BW на IW *(теорема «трилистника»)*: $\boxed{IW^2 = AW \cdot L_1W}$.

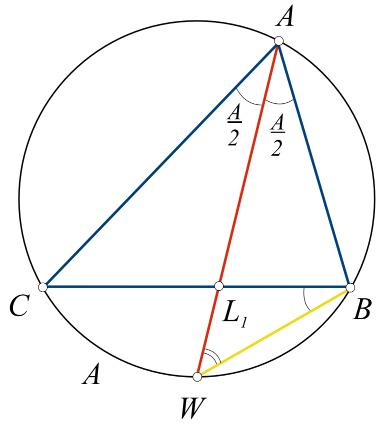

рис.12

Вернемся к *рис.11*. Для окружности q: $WA \cdot WL_1 = WQ \cdot WK$. Стало быть, $\boxed{IW^2 = WQ \cdot WK}$. А это и означает, что IK – высота, проведенная из вершины прямого угла в ΔWIQ. Значит, $\angle WIQ = \angle AIQ = 90°$.

Несколько задач на отрезок AI предложим для самостоятельного решения.

Задача 13.

Докажите справедливость формулы $AI \cdot AI_a = 2R \cdot h_a$, где R – радиус описанной окружности, $AH_1 = h_a$ – высота из вершины A.

Задача 14.

Найдите углы треугольника ABC, в котором $AI = n$ и $C = 2A$.

Задача 15.

Серединный перпендикуляр к отрезку AI треугольника ABC пересекает сторону AB в точке K. Луч KI пересекает BC в точке N. Докажите, что треугольник CIN – равнобедренный.

Задача 16.

Постройте треугольник ABC по отрезкам AI; AH и радиусу r вписанной в треугольник ABC окружности.

Задача 17.

В треугольнике ABC угол A – тупой. На стороне BC как на диаметре построена окружность k. Лучи BI и CI пересекают k в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AI \perp XY$.

Задача 18.

В треугольнике ABC отрезок AI пересекает вписанную окружность в точке F. K_1; K_2; K_3 – точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. Отрезки K_1K_2 и CF пересекаются в точке P. Отрезки K_1K_3 и BF – в точке Q. Докажите, что $AI \perp PQ$.

Задача 19.

Постройте треугольник ABC по отрезку AI и точке M пересечения медиан этого треугольника.

Задача 20.

Окружность t касается сторон AC и AB треугольника ABC в точках D и F, а также описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что отрезок AI – высота, медиана и биссектриса в равнобедренном треугольнике ADF.

Г.Филипповский,

г.Киев