# 4 точки на прямой!

Существует довольно много геометрических задач, в которых необходимо доказать принадлежность трех точек одной прямой. Задач, в которых четыре точки лежат на одной прямой, не так много. Поэтому и возникла идея собрать коллекцию таких задач, в основном олимпиадных, которые позволяют заострить внимание на важных, полезных фактах геометрии треугольника…

## Задача 1.

Из вершины $A$ треугольника $ABC$ проведены перпендикуляры на внутренние и внешние биссектрисы углов $B$ и $C$. Докажите, что основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой.

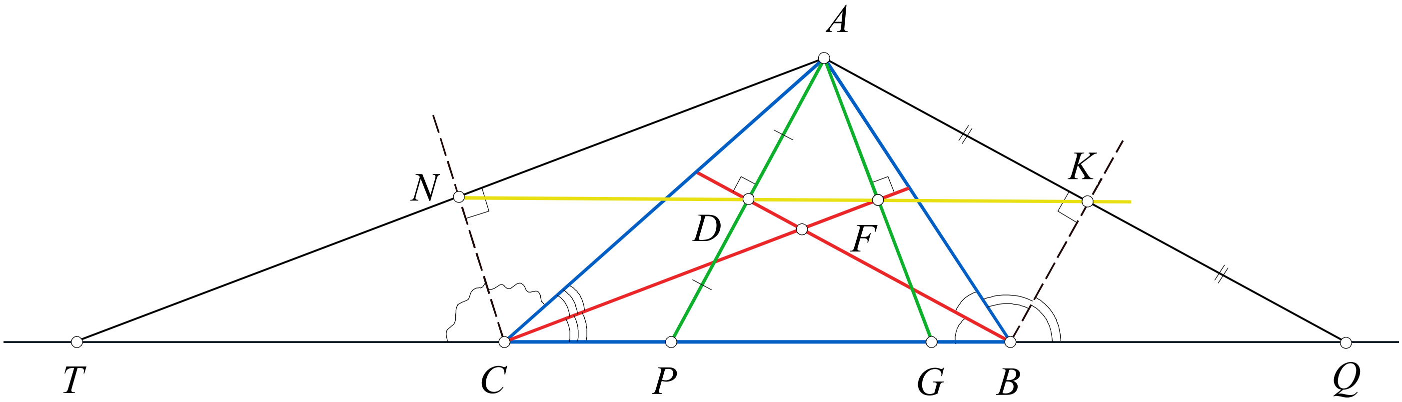


*рис.1*

### *Доказательство.*

Пусть $AD$ и $AF$ – перпендикуляры к внутренним биссектрисам углов $B$ и $C$, а $AK$ и $AN$ – ко внешним *(рис.1)*. Продолжим $AD$ и $AK$ до пересечения с прямой $BC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Тогда $DP = AD$ и $KQ = AK$ (треугольники $ABP$ и $ABQ$ – равнобедренные). В таком случае, точки $D$ и $K$ лежат на прямой, содержащей среднюю линию $\Delta ABC$, параллельной стороне $BC$. Продлив $AF$ и $AN$ до пересечения с прямой $BC$, получим аналогичную ситуацию. Таким образом, все 4 точки: $N, D, F, K$ принадлежат одной прямой, совпадающей со средней линией $\Delta ABC$, параллельной стороне $BC$.

## Задача 2.

$AK$, $BN$ и $CT$ – высоты в остроугольном треугольнике $ABC$. $KD$ и $KF$ – перпендикуляры к сторонам $AC$ и $AB$ соответственно. Отрезки $KD$ и $KF$ удвоили за точки $D$ и $F$ – получили точки $P$ и $Q$. Докажите, что точки $P, N, T, Q$ лежат на одной прямой.

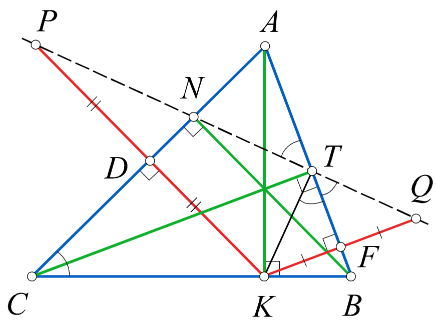


*рис.2*

### *Доказательство.*

Соединим точки $Q$, $T$ и $N$ *(рис.2)*. Поскольку точки $B – T – N – C$ лежат на одной окружности с диаметром $BC$, то $\angle ATN = C$. Так как $A – T – K – C$ – одна окружность с диаметром $AC$, то и $\angle BTK = C$.

Но и $\angle QTB = C$ – из соображений симметрии ($\Delta KTF = \Delta QTF$). Следовательно, $\angle ATN = \angle QTB = C$ и точки $Q, T, N$ принадлежат одной прямой. Аналогично покажем, что $P – N – T$ – одна прямая. Стало быть, все 4 точки: $P, N, T, Q$ – лежат на одной прямой.

## Задача 3.

$AD$ – диаметр окружности, описанной около остроугольного треугольника $ABC$. $H$ – точка пересечения его высот (ортоцентр), $N$ – середина $BC$. Окружность, построенная на отрезке $AH$ как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника $ABC$ в точке $P$. Докажите, что $P – H – N – D$ – одна прямая.

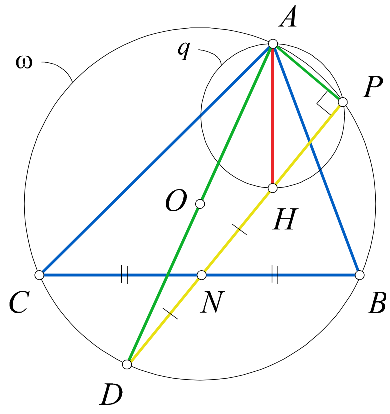

*рис.3*

### Доказательство.

Пусть окружность ω описана около $\Delta ABC$, а окружность $q$ построена на отрезке $AH$ как на диаметре *(рис.3)*. Очевидно, $\angle APH = 90°$ ($AH$ – диаметр в окружности $q$). Но и $\angle APD = 90°$ ($AD$ – диаметр ω). Значит, точки $P, H, D$ лежат на одной прямой. Известно, что точки, симметричные ортоцентру $H$ относительно середин сторон треугольника, лежат на его описанной окружности, причем эти точки диаметрально противоположны вершинам треугольника *(покажите!)*. То есть, $H – N – D$ – одна прямая. Тогда все 4 точки: $P, H, N, D$ принадлежат одной прямой.

### Задача 4.

Биссектрисы углов $A, B, C$ треугольника $ABC$ при продолжении пересекают описанную около него окружность ω в точках $P, Q$ и $T$ соответственно. Касательная к ω в вершине $A$ и прямая $QT$ пересекаются в точке $G$. $AC$ и $PQ$ пересекаются в точке $D$, а $AB$ и $PT$ – в точке $F$. Докажите, что $D – I – F – G$ – одна прямая, где $I$ – инцентр, точка пересечения биссектрис.

### Доказательство.

Поскольку $QA = QI$ и $TA = TI$ (теорема «трилистника»), то $QT$ совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку $AI$. Тогда $\Delta AGI$ – равнобедренный и $\angle GAI = \angle GIA$ *(рис.4)*. Но и $\Delta ATI$ – равнобедренный. Тогда $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 1 = \angle ACT$ – угол между касательной и хордой, то $\angle 2 = \angle ACT = \angle TCB$ и $GI \parallel BC$. Вновь по теореме «трилистника» $PI = PC$ и $PQ$ – серединный перпендикуляр к $CI$. Значит, $CD = DI$ и $\angle DCI = \angle DIC = \angle ICB$ ($CI$ – биссектриса). Следовательно, $DI \parallel BC$. Аналогично можно показать, что $FI \parallel BC$. То есть $D – I – F – G$ – прямая, параллельная $BC$.

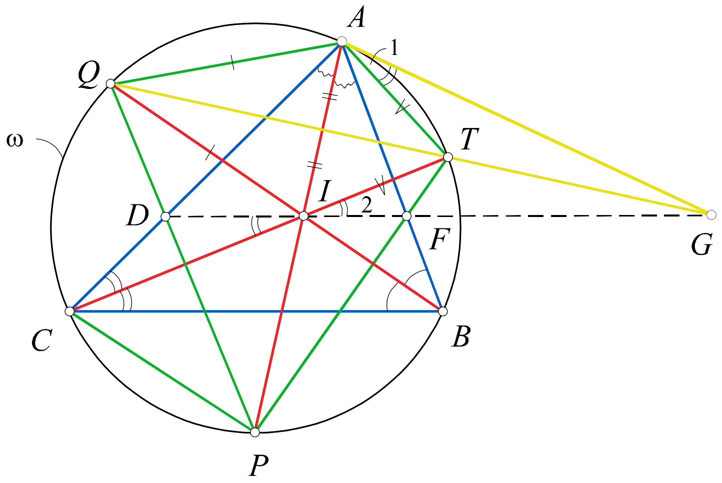

*рис.4*

### Задача 5.

Окружность $s$ с центром $I$ вписана в треугольник $ABC$ и касается его сторон $BC, AC$ и $AB$ в точках $D, E$ и $F$ соответственно. Окружность $k$ описана около треугольника $BIC$ и пересекает окружность $s$ в точках $P$ и $Q$ *(рис.5)*. Точки $K$ и $N$ – середины $DE$ и $DF$. Докажите, что $P – K – N – Q$ – одна прямая.

*Доказательство.*

Опишем окружность $t$ около четырехугольника $IFBD$ ($\angle IFB = \angle IDB = 90°$). Поскольку $BF = BD$ (касательные к $s$), то биссектриса $BI$ проходит через точку $N$ – середину $FD$. $PQ$ – общая хорда (радикальная ось) окружностей $s$ и $k$. $BI$ – радикальная ось окружностей $k$ и $t$, а $FD$ – радикальная ось окружностей $s$ и $t$. Последние две радикальные оси проходят через точку $N$ – радикальный центр этих трех окружностей.

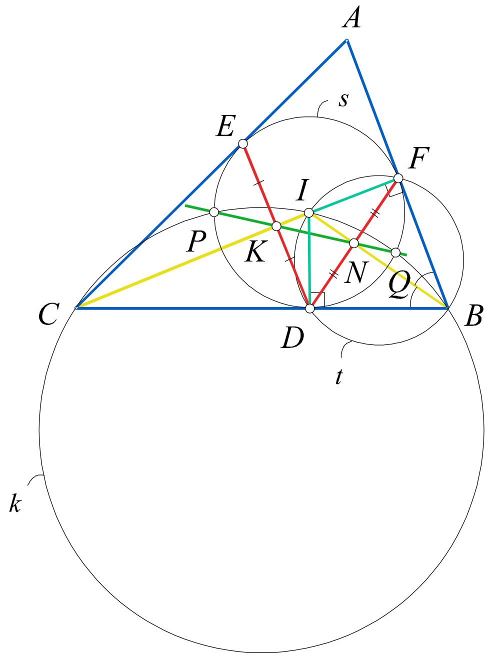

*рис.5*

Стало быть, и $PQ$ проходит через $N$. Аналогично можно показать, что $PQ$ проходит через $K$, то есть точки $P, K, N, Q$ лежат на одной прямой.

### Задача 6.

Высоты $BD$ и $CF$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в его ортоцентре $H$. Точка $X$ взята произвольно на стороне $BC$. Описанные окружности ω и $q$ треугольников $BFX$ и $CDX$ вторично пересекаются в точке $T$. $XQ$ и $XP$ – соответственно диаметры ω и $q$. Докажите, что точки $P, T, H, Q$ принадлежат одной прямой *(рис.6)*.

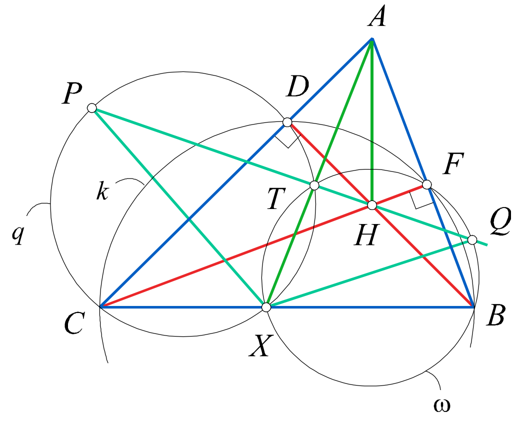

*рис.6*

*Доказательство.*

Построим окружность $k$ на стороне $BC$ как на диаметре. Очевидно, она пройдет через точки $F$ и $D$. Тогда $CD$ – общая хорда (радикальная ось) окружностей $q$ и $k$, а $BF$ – радикальная ось окружностей ω и $k$. Следовательно, точка $A$ пересечения прямых $BF$ и $CD$ – радикальный центр всех трех окружностей. Значит, $XT$ – общая хорда окружностей $q$ и $\omega$ – проходит через вершину $A$, то есть, $X – T – A$ – одна прямая.

Так как четырехугольник $CDTX$ вписан в окружность $q$, то $\angle DTX = 180° - C$. Аналогично $\angle FTX = 180° - B$ (четырехугольник $BFTX$ вписан в ω). Тогда $\angle DTF = 180° - A$ и точки $A, D, T, F$ лежат на одной окружности. Однако точки $A, D, H, F$ лежат на окружности с диаметром $AH$. Значит, 5 точек $A, D, T, H, F$ находятся на окружности, для которой $AH$ – диаметр. При этом $\angle ATH = 90°$ – вписанный, опирается на диаметр $AH$ в этой окружности. $\angle PTX = 90°$ ($PX$ – диаметр $q$) и $\angle QTX = 90°$ ($QX$ – диаметр ω). Следовательно, $P – T – H – Q$ – одна прямая.

### Задача 7.

Описанная около треугольника $ABC$ окружность ω и окружность $s$, построенная на отрезке $AI$ как на диаметре ($I$ – инцентр в треугольнике $ABC$) вторично пересекаются в точке $Q$. Биссектриса угла $A$ при продолжении пересекает ω в точке $W$. $K$ – точка касания вписанной в треугольник $ABC$ окружности со стороной $BC$. Высота $AD$ пересекает $s$ в точке $F$ *(рис.7)*. Докажите, что $Q – F – K – W$ – одна прямая.

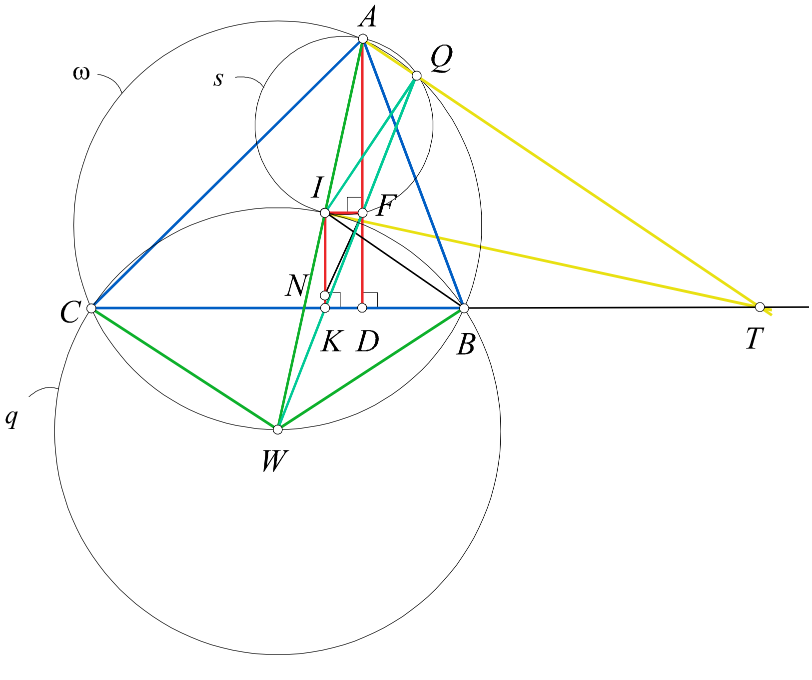

*рис.7*

*Доказательство.*

Опишем окружность $q$ около $\Delta BIC$ с центром в точке $W$ ($WI = WB = WC$ – теорема «трилистника»). Нетрудно показать, что окружности $s$ и $q$ касаются в точке $I$ ($T = AQ \cap BC$ – радикальный центр всех трех окружностей, а $TI$ – общая касательная окружностей $s$ и $q$).

Так как $\angle AIT = \angle ADT = 90°$, то точки $A, I, D, T$ лежат на одной окружности с диаметром $AT$. При этом $IK \perp DT$; $IF \perp AD$ ($\angle AFI = 90°$ – вписанный, опирается на диаметр $AI$ в окружности $s$); $\angle AQI = 90°$ – по той же причине. Значит, для $\Delta ADT$ и точки $I$, лежащей на его описанной окружности, $K – F – Q$ – прямая Симсона. Покажем, что точки $F, K, W$ также лежат на одной прямой. Пусть $BC = a; AC = b; AB = c$. Тогда *по теореме Птолемея* для вписанного четырехугольника

$ABWC$: $AW \cdot a = BW \cdot b + CW \cdot c$. С учетом теоремы «трилистника» получаем: $\frac{AW}{IW} = \frac{b+c}{a}$. Пусть также отрезок $FW$ пересекает $IK$ в точке $N$. Из подобия $\Delta AFW$ и $\Delta INW$: $\frac{AF}{IN} = \frac{AW}{IW} = \frac{b+c}{a}$, или $\frac{h_a-r}{x} = \frac{b+c}{a}$ ($IN = x$, и мы хотим показать, что $x = r$, или $N \equiv K$). $a \cdot h_a - ar = (b + c)x$; $2S - ar = (b + c)x$; $(a + b + c)r - ar = (b + c)x$; $(b + c)r = (b + c)x$ и $x = r$. Таким образом, $F - K - W$ – прямая, а значит, все 4 точки: $Q, F, K, W$ лежат на одной прямой.

## Задача 8.

Точки $K, N, T$ – соответственно середины сторон $BC$, $AC$ и $AB$ в остроугольном треугольнике $ABC$. $AD$ – высота в этом треугольнике. Точку $D$ отобразили симметрично относительно прямых $NK$ и $TK$ – получили точки $P$ и $Q$ *(рис.8)*. Докажите, что $A – O – Q – P$ – одна прямая ($O$ – центр описанной окружности треугольника $ABC$).

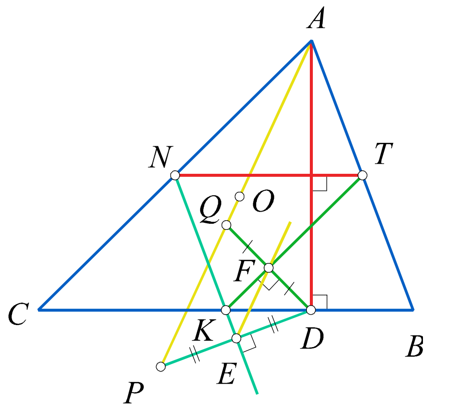

*рис.8*

*Доказательство.*

Точки $N, K, D, T$ лежат на окружности Эйлера $\Delta ABC$. Пусть точки $E$ и $F$ – основания перпендикуляров, проведенных из точки $D$ этой окружности к прямым $KN$ и $KT$. Таким образом, $EF$ – прямая Симсона для точки $D$, лежащей на описанной окружности треугольника $KNT$. Тогда прямая $P – Q – A$ – *прямая Штейнера* (так называемый «удвоенный Симсон») для $\Delta KNT$. Известно, что прямая Штейнера любого треугольника проходит через его ортоцентр *(покажите!)*. Следовательно, прямая $P – Q – A$ проходит через точку $O$ – ортоцентр $\Delta KNT$.

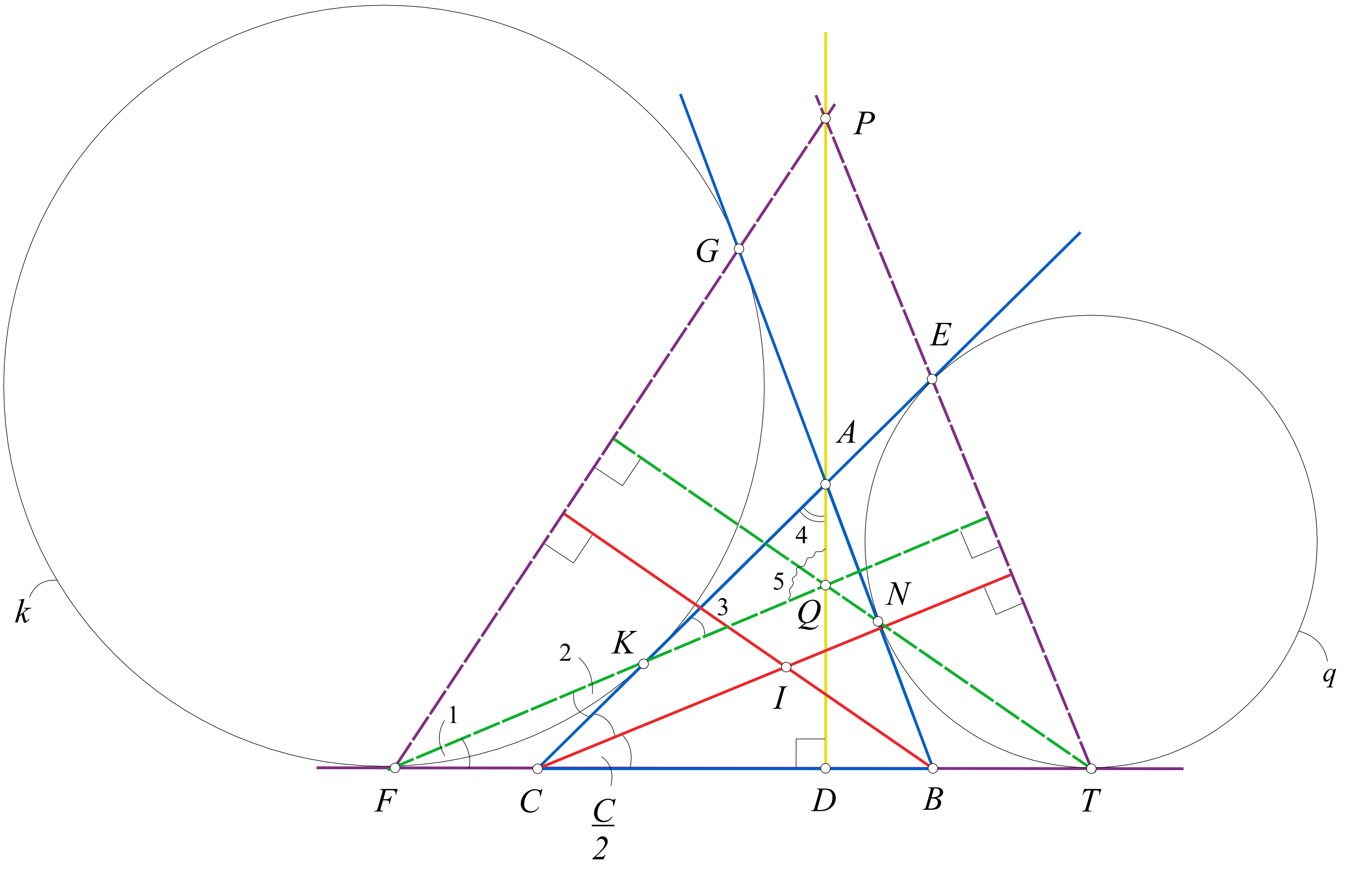

*рис.9*

## Задача 9.

Вневписанные окружности $k$ и $q$ треугольника $ABC$ касаются сторон $AC$ и $AB$ в точках $K$ и $N$ соответственно. Окружность $k$ касается прямых $BC$ и $AB$ в точках $F$ и $G$, окружность $q$ касается прямых $BC$ и $AC$ в точках $T$ и $E$ *(рис.9)*. Прямые $FG$ и $TE$ пересекаются в точке $P$, а прямые $FK$ и $TN$ – в точке $Q$. Докажите, что точки $P – A – Q – D$ принадлежат одной прямой ($AD$ – высота в $\Delta ABC$).

*Доказательство.*

Пусть действительно прямая $FK$ пересекает высоту $AD$ в точке $Q$. Покажем, что и прямая $TN$ придет в точку $Q$.

Так как $\angle 1 = \angle 2 = \frac{C}{2}$ ($CF = CK$) и $\angle 3 = \frac{C}{2}$ – вертикальный с углом 2, а $\angle 4 = 90° - C$ (из $\Delta ACD$), то $\angle 5 = \angle AQK = 90° + \frac{C}{2}$ (из $\Delta AKQ$). Тогда по теореме синусов для $\Delta AQK$: $\frac{AQ}{\sin\angle 3} = \frac{AK}{\sin\angle 5}$. Поскольку $AK = p – c$ *(покажите!)*

$$AQ = \frac{(p-c)\sin\frac{C}{2}}{\sin(90° + \frac{C}{2})} = (p - c)tg\frac{C}{2}$$

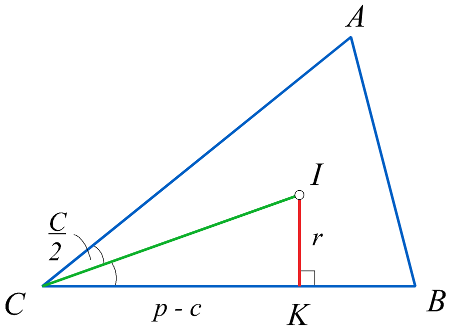

*рис.10*

Но и отрезок, равный $r$ – радиусу вписанной окружности, равен $(p - c)tg\frac{C}{2}$ *(рис.10)*. Значит, $AQ = r$. Тогда и прямая $TN$ пересечет высоту $AD$ в точке $Q$. Заметим далее, что $CI \perp TE$ ($I$ – инцентр), поскольку $CE = CT$ – касательные. Также $FK \perp TE$ ($FK \parallel CI$). Аналогично $BI \perp FG$ и $TN \perp FG$. Следовательно, точка $Q$ – ортоцентр в $\Delta FPT$. А это и означает, что $P – A – Q – D$ – одна прямая.

## Задача 10.

Окружность $k$, построенная на стороне $BC$ треугольника $ABC$ как на хорде, касается его вписанной окружности в точке $F$. Точка $Q$ – середина высоты $AH_1$. $K$ – точка касания вписанной окружности со стороной $BC$. $I_a$ – центр вневписанной окружности, касающейся стороны $BC$ в точке $T$. Докажите, что 4 точки: $F – Q – K – I_a$ лежат на одной прямой.

*Доказательство.*

Покажем сначала, что точки $I_a$; $K$; $F$ принадлежат одной прямой. Проведем в точке $F$ общую касательную к окружностям. Пусть она пересекает прямую $BC$ в точке $N$ *(рис.11)*. По теореме о квадрате касательной $\boxed{NF^2 = NC \cdot NB}$ (1). Пусть также $NI$ ($I$ – инцентр) пересекает $FK$ в точке $P$. Очевидно, $FIKN$ – дельтоид ($FI = IK = r$ и $NF = NK$ – касательные), то есть, $FK \perp NI$. Тогда $FP$ – высота, проведенная из вершины прямого угла. Значит, $\boxed{NF^2 = NI \cdot NP}$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $B – P – I – C$ лежат на одной окружности. Но для описанной окружности $\Delta BIC$ отрезок $II_a$ является диаметром *(покажите!)*. Поскольку $\angle IPI_a = 90°$, то $F$, $P$, $K$, $I_a$ лежат на одной прямой.

Теперь покажем, что на этой же прямой лежит точка $Q$ – середина $AH_1$. При гомотетии с центром в точке $A$ вписанная окружность перейдет во вневписанную, $\Delta ABC$ – в $\Delta ADE$ *(рис.12)*. Точка $I$ – в $I_a$, а точка $K$ – в точку $G$. Тогда в подобных треугольниках $AH_1K$ и $GTK$ отрезки $KQ$ и $KI_a$ – соответственные. Но $KI_a$ – медиана в $\Delta GTK$. Следовательно, $KQ$ – медиана в $\Delta AH_1K$ и $AQ = QH_1$. Таким образом, точки $F$, $Q$, $K$, $I_a$ лежат на одной прямой.

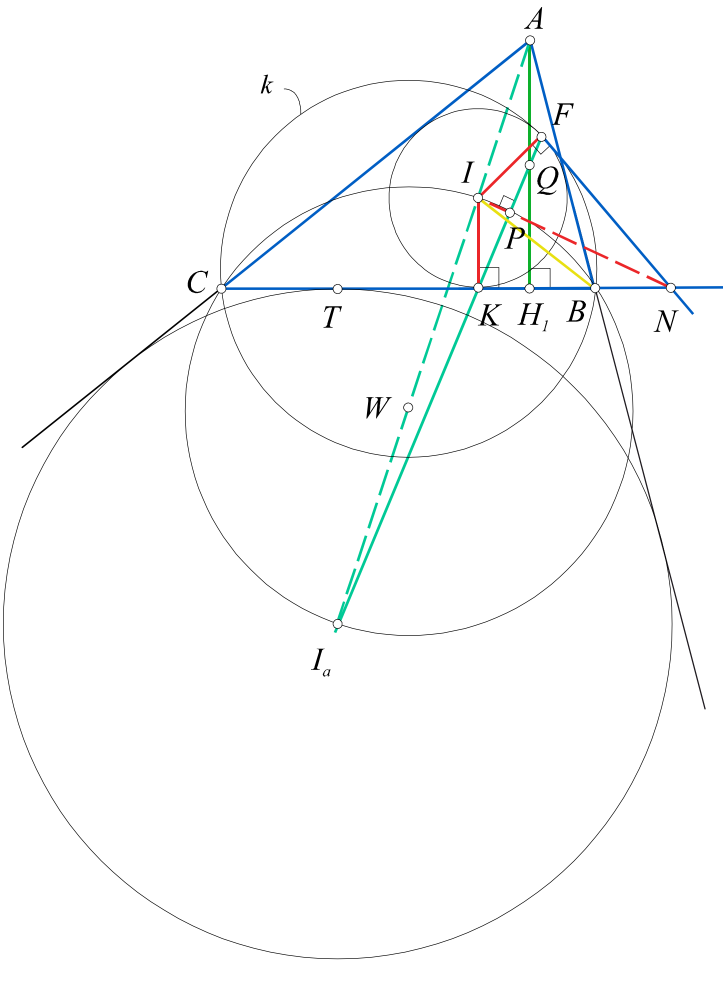

*рис.11*

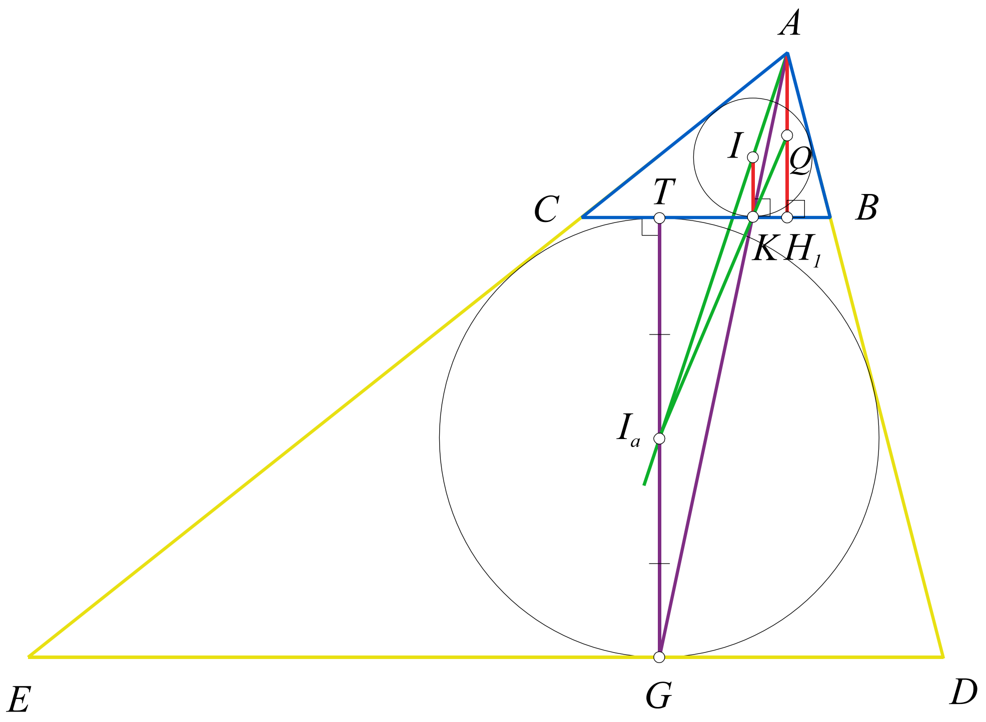


*рис.12*

## Задача 11 *(Михаил Сидоренко)*

Окружность ω описана около треугольника $ABC$. Окружность $t$ касается сторон $AC$ и $AB$, а также описанной окружности ω в точке $Q$. Через инцентр $I$ проведена прямая параллельно $BC$. Она пересекает $AB$ и $AC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. $BE$ и $CD$ пересекаются в точке $P$. $K$ – точка касания вписанной в $\Delta ABC$ окружности со стороной $BC$ *(рис.13)*. Докажите, что $Q – K – P – F$ – одна прямая ($AF \parallel BC$ и $F \in \omega$).

*Доказательство.*

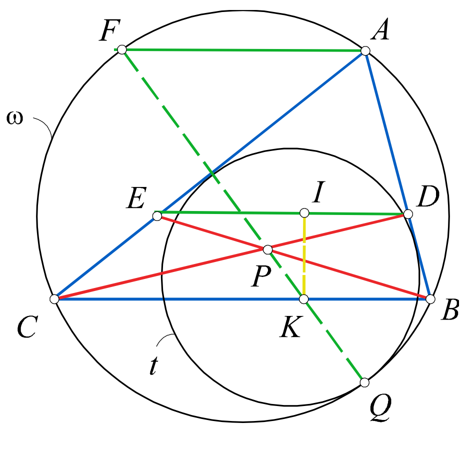


*рис.13*

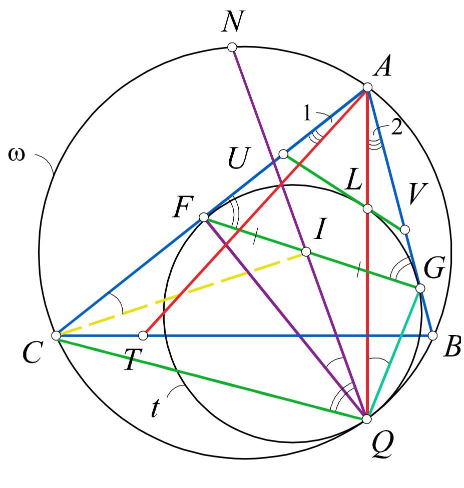


*рис.14*

Докажем сначала следующую *лемму*: пусть окружность $t$ касается $AC$ и $AB$ в точках $F$ и $G$, а описанной окружности ω – в точке $Q$. Пусть также $T$ – точка касания вневписанной окружности со стороной $BC$ *(рис.14)*. Тогда $AT$ и $AQ$ – изогонали ($\angle CAT = \angle BAQ$).

Известно, что инцентр $I$ – середина $FG$ *(лемма Веррьера)* и луч $QI$ пересекает ω в точке $N$ – середине дуги $BAC$ *(покажите!)*. $\angle AFG = \angle AGF$. Подсчетом углов нетрудно показать, что и $\angle CQN$ – такой же. Тогда $C – F – I – Q$ – одна окружность и $\angle FCI = \angle FQI = \frac{C}{2}$. Но $\angle FQI = \angle AQG$ – поскольку $QI$ и $QA$ – соответственно медиана и симедиана в треугольнике $FQG$. Пусть $AQ$ пересекает окружность $t$ в точке $L$. Проведем в точке $L$ касательную $UV$ к $t$. Очевидно, $UV$ – антипараллель к $BC$ ($\angle VLG = \angle VGL = \angle LQG = \frac{C}{2}$ и $\angle AVL = C$ – внешний для $\Delta VLG$). Стало быть, $AL$ и $AT$ –

соответствующие отрезки в подобных треугольниках $AUV$ и $ABC$, то есть, $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно, $AQ$ и $AT$ – изогонали.

Вернемся к решению задачи. Проведем серединный перпендикуляр к $BC$, который пересекает луч $QK$ в точке $S$ *(рис.15)*. Тогда $ST = SK$ (точки $T$ и $K$ равноудалены от серединного перпендикуляра). Пусть луч $AT$ пересекает ω в точке $A_1$. Очевидно, $SA_1 = SQ$. Серединный перпендикуляр также разделит пополам и отрезок $AF$. Так как $A - T - A_1$ – одна прямая, то из соображений симметрии $Q - K - F$ – тоже одна прямая. Теперь покажем, что точки $K - P - F$ принадлежат одной прямой. Вновь проведем серединный перпендикуляр к $BC$ *(рис.16)*. Для развернутого угла $ESD$ отрезки $CS$ и $BS$ – изогонали. И *по теореме об изогоналях* $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 1 = \angle 3$ – симметрия. Тогда $\angle 2 = \angle 3$ и $K - P - F$ – одна прямая. Следовательно, $Q - K - P - F$ – одна прямая.

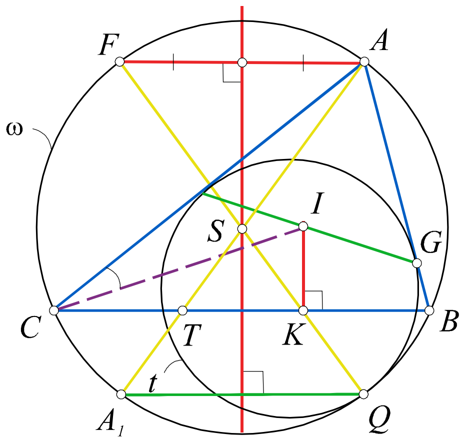


*рис.15*

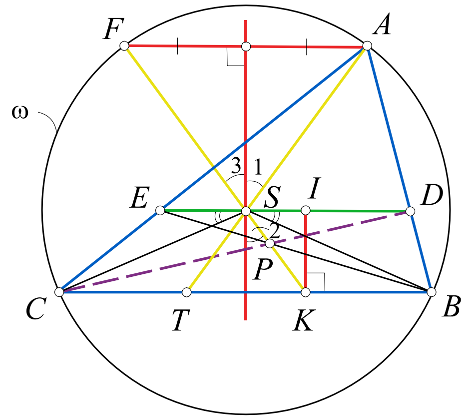


*рис.16*

Несколько задач на заданную тему предложим для самостоятельного решения.

Задача 12. $BK$ и $CN$ – высоты в остроугольном треугольнике $ABC$, пересекающиеся в ортоцентре $H$. Биссектрисы углов $ACH$ и $ABH$ пересекаются в точке $P$. Докажите, что середины отрезков $BC$, $OH$, $AH$ и точка $P$ лежат на одной прямой.

Задача 13. $HK$ – биссектриса угла $BHC$ в остроугольном треугольнике $ABC$. Луч $KH$ пересекает прямые $AB$ и $AC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Перпендикуляры в точке $P$ к $AB$ и точке $Q$ к $AC$ пересекаются в точке $F$. $N$ – середина $BC$, $D$ – точка, диаметрально противоположная вершине $A$. Докажите, что точки $F - H - N - D$ лежат на одной прямой.

Задача 14. Биссектрисы углов $B$ и $C$ треугольника $ABC$ при продолжении пересекают описанную окружность этого треугольника соответственно в точках $K$ и $N$. Около треугольника $KIC$ описана окружность, пересекающая $AC$ в точке $F$. Описанная окружность треугольника $NIB$ пересекает $AB$ в точке $T$. Докажите, что $K - F - T - N$ – одна прямая.

Задача 15. На высоте $AD$ остроугольного треугольника $ABC$ взята точка $Q$ такая, что $AQ = r$ – радиусу вписанной окружности. Точка $N$ – середина $BC$. $K$ – точка касания вписанной окружности со стороной $BC$. Докажите, что точка $N$, инцентр $I$, середина $AK$ и точка $Q$ лежат на одной прямой.

Задача 16. Из точки $X$ описанной окружности треугольника $ABC$ проведены перпендикуляры $XD$, $XE$ и $XF$ соответственно к сторонам $BC$, $AC$ и $AB$ треугольника. Затем эти перпендикуляры удвоены за точки $D$, $E$ и $F$. Соответственно получили точки $P$, $Q$ и $T$. Докажите, что ортоцентр $H$ и точки $P$, $Q$, $T$ лежат на одной прямой *(прямой Штейнера)*.

Задача 17. Окружность $t$ касается сторон $AC$ и $AB$ треугольника $ABC$ в точках $F$ и $G$, а также описанной около него окружности в точке $Q$. Луч $QF$ пересекает описанную окружность в точке $K$, а луч $KG$ – в точке $N$. $P$ и $T$ – середины $AF$ и $AG$ соответственно. Докажите, что $K - P - T - N$ – одна прямая.

Задача 18. Вневписанная окружность треугольника $ABC$ касается стороны $BC$ в точке $T$, а продолжений $AC$ и $AB$ соответственно в точках $P$ и $Q$. Точка $L$ – середина $PT$, точка $G$ – середина $TQ$. Из центра $I$ проведены касательные $ID$ и $IE$ к вневписанной окружности. Докажите, что точки $D – L – G – E$ лежат на одной прямой.

Задача 19. Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается его сторон $BC$, $AC$ и $AB$ в точках $K$, $N$, $T$ соответственно. $KF$ – перпендикуляр к отрезку $NT$. Описанная окружность треугольника $ABC$ и описанная окружность треугольника $ANT$ вторично пересекаются в точке $Q$. Докажите, что $Q – F – I – D$ – одна прямая ($D$ – точка, диаметрально противоположная вершине $A$).

Задача 20. $AD$ – высота в остроугольном треугольнике $ABC$, $P$ – середина $AC$, $Q$ – середина $AB$. На $PQ$ как на хорде построена окружность $t$, касающаяся описанной окружности треугольника $ABC$ в точке $X$. $AF$ – хорда описанной окружности треугольника $ABC$, причем $AF \parallel BC$. Докажите, что $X – D – M – F$ – одна прямая ($M$ – центроид в треугольнике $ABC$).

Егор Мищенко,

Григорий Филипповский

Корректор: Богдана Вовк