

Тільки дві лінії!

Задачі на побудову є одними з найважливіших у шкільному курсі геометрії. З них починали давньогрецькі математики. З них і в наші часи в учнів починається розуміння, відчуття взаємозв'язків між елементами трикутника, кола та інших геометричних фігур.

Побудови в геометрії, як відомо, виконуються за допомогою циркуля та лінійки. Іноді – лише циркуля або лише лінійки.

Великий інтерес у школярів викликають геометрографічні побудови найменшою кількістю ліній. Можна назвати їх «оптимальними побудовами». Тут допомагають загальна ерудиція, інтуїція та винахідливість.

Дана добірка об'єднує задачі, в яких ту чи іншу побудову потрібно виконати, провівши рівно дві лінії. Нагадаємо, що лінія – це відрізок, пряма, коло або дуга (частина кола). Оскільки в усіх задачах слід провести **лише дві лінії**, то в умовах задач про це не обумовлюється.

Задача 1.

Дано коло ω з центром O та пряма ℓ , що містить діаметр кола. Побудуйте кут 30° .

Розв'язання.

Нехай пряма ℓ перетинає ω в точках A і B (рис. 1). Із точки B розхилом циркуля, що дорівнює BO , робимо засічку на ω – отримуємо точку C (перша лінія). Сполучаємо C і A (друга лінія). При цьому $\angle CAB = 30^\circ$. Дійсно, $\angle ACB = 90^\circ$ – вписаний, спирається на діаметр $AB = 2R_\omega$. До того ж $BC = R_\omega$. Оскільки катет BC в 2 рази менший за гіпотенузу AB , то він лежить проти кута 30° .

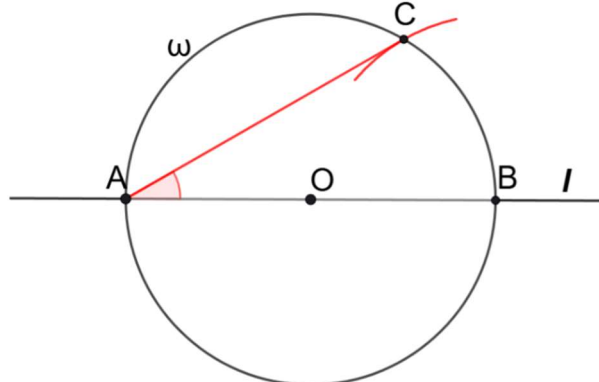


Рис. 1

Задача 2.

Дано прямокутний $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) із позначеним інцентром I – центром вписаного кола. Побудуйте кут, що дорівнює 135° .

Розв'язання.

I спосіб.

Проведемо відрізки бісектрис AI та BI (рис. 2). Оскільки $\angle A + \angle B = 90^\circ$, то сума половинок цих кутів дорівнює 45° і $\angle AIB = 135^\circ$.

II спосіб.

Він також зображений на рис. 2. Перша лінія – бісектриса CI . Друга лінія – продовжимо BC за точку C і $\alpha = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

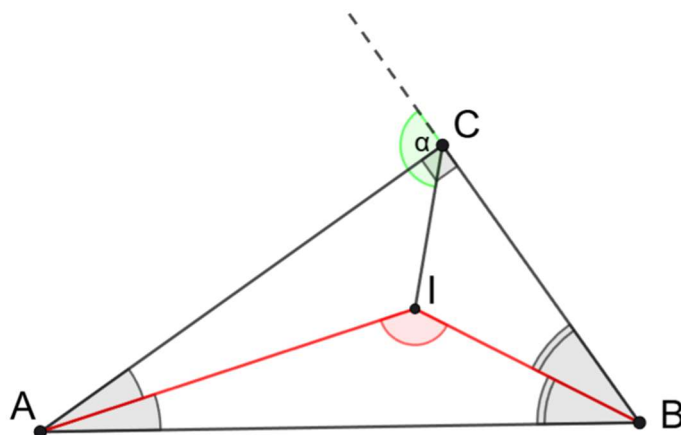


Рис. 2

Задача 3.

У гострокутному $\triangle ABC$ проведено висоту AK , а також позначено точку O – центр описаного кола цього трикутника. Створіть на *рис. 3* три рівні кути.

Розв'язання.

AO і CO – шукані лінії. Покажемо це. $\angle 1 = 90^\circ - B$ із $\triangle ABK$. $\angle AOC = 2B$ – центральний. Тоді

$$\angle 2 = \angle 3 = \frac{180^\circ - 2B}{2} = 90^\circ - B, \text{ тобто } \angle 1 = \angle 2 = \angle 3.$$

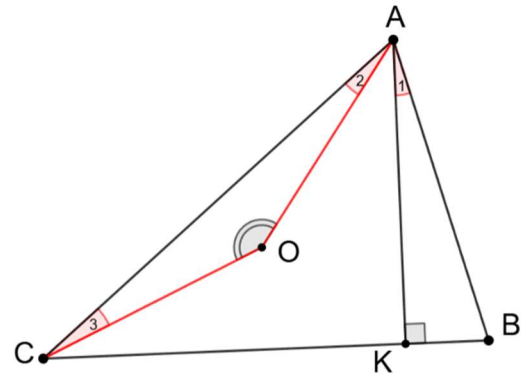


Рис. 3

Задача 4.

У коло ω з центром O вписано $\triangle ABC$. Позначено також точку I – інцентр $\triangle ABC$. Побудуйте точку P – середину дуги BAC .

Розв'язання.

Проведемо промінь AI до перетину з ω у точці W (*рис. 4*). Промінь WO перетинає ω у шуканій точці P . Покажемо це: $\angle 1 = \angle 2$ (AI збігається з бісектрисою кута A), тоді рівні відповідні дуги і хорди, що їх стягують ($CW = BW$). Очевидно, що WO збігається з серединним перпендикуляром до BC і точка P – середина дуги BAC .

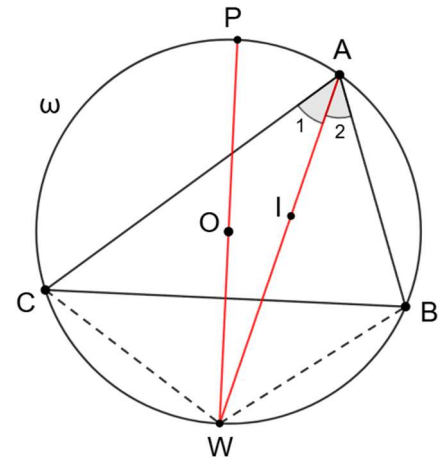


Рис. 4

Задача 5.

Бісектриси кутів A і B трикутника ABC при продовженні перетинають описане навколо нього коло ω у точках W і Q відповідно. Побудуйте пряму, паралельну стороні BC .

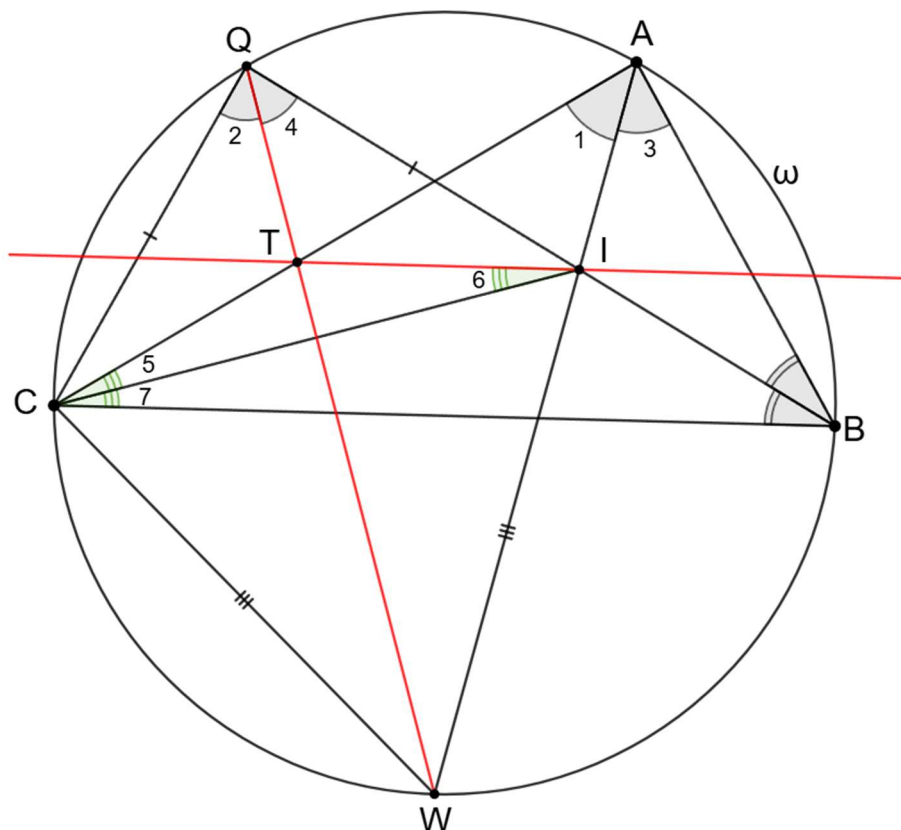


Рис. 5

Розв'язання.

Проведемо QW (перша лінія). Нехай при перетині з AC отримано точку T (рис. 5). Тоді пряма TI – друга лінія – буде шуканою. Дійсно, $\angle 1 = \angle 2 = \frac{A}{2}$ вписані, спираються на одну дугу. Аналогічно. $\angle 3 = \angle 4 = \frac{A}{2}$. Відповідно до теореми «трилисника» $IW = CW$ та $IQ = CQ$. Отже, QW – серединний перпендикуляр до CI і $\angle 5 = \angle 6 = \frac{C}{2}$. Але й $\angle 7 = \frac{C}{2}$ (CI – бісектриса кута C). Оскільки $\angle 6 = \angle 7$, отже пряма TI паралельна BC .

Задача 6.

У коло ω вписано $\triangle ABC$ із позначеним інцентром I . Побудуйте точку I_a – центр зовнішнього кола, що дотикається до сторони BC .

Розв'язання.

Спочатку проведемо промінь AI , який перетинає ω в точці W . Потім із центром у точці W радіусом WI зробимо засічку на цьому промені – отримаємо точку I_a (рис. 6). Для розв'язання задачі ми скористалися *теоремою Мансіона*: $IW = WI_a$ (покажіть!).

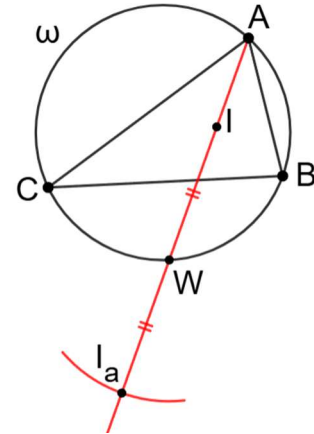


Рис. 6

Задача 7.

Дано гострокутний $\triangle ABC$ із позначеними в ньому ортоцентром H (точка перетину висот) і центроїдом M (точка перетину медіан), а також описаним навколо нього колом ω . Побудуйте точку X (відмінну від A і H) та таку, що лежить на колі, побудованому на відрізьку AH як на діаметрі.

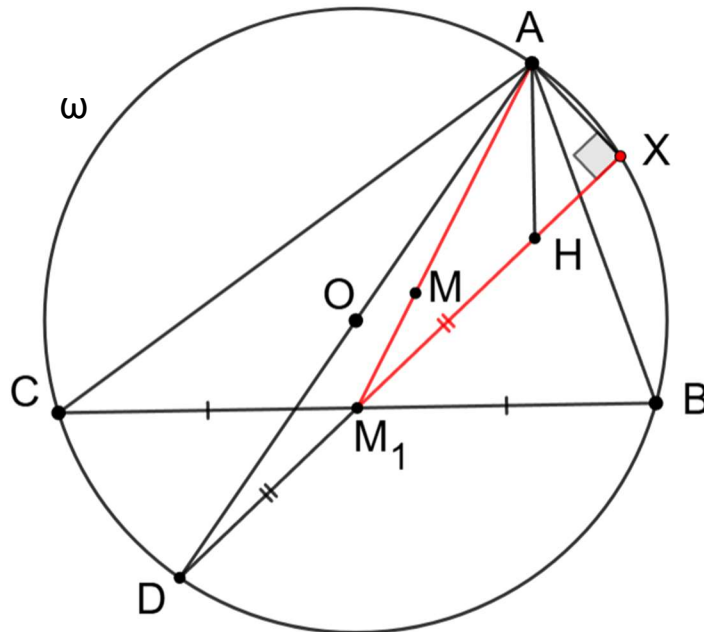


Рис. 7

Розв'язання.

Перша лінія – промінь AM до перетину з BC в точці M_1 – середині BC (рис. 7). Друга лінія: промінь M_1H перетинає ω в шуканій точці X . Покажемо це. Відомо, що точки, симетричні ортоцентру H відносно середин сторін трикутника, лежать на його описаному колі (покажіть!). Тобто, якщо $HM_1 = M_1D$, тоді точка D лежить на ω . Більше того, AD – діаметр ω (також покажіть!). Тоді $\angle AXD = 90^\circ$. Значить, і $\angle AXH = 90^\circ$, звідки випливає, що точка X лежить на колі з діаметром AH .

Задача 8.

AK , BN і CT – висоти в гострокутному трикутнику ABC . Точки P і Q – ортоцентри в трикутниках ANT і BKT відповідно. Побудуйте точку O – центр описаного кола ΔABC .

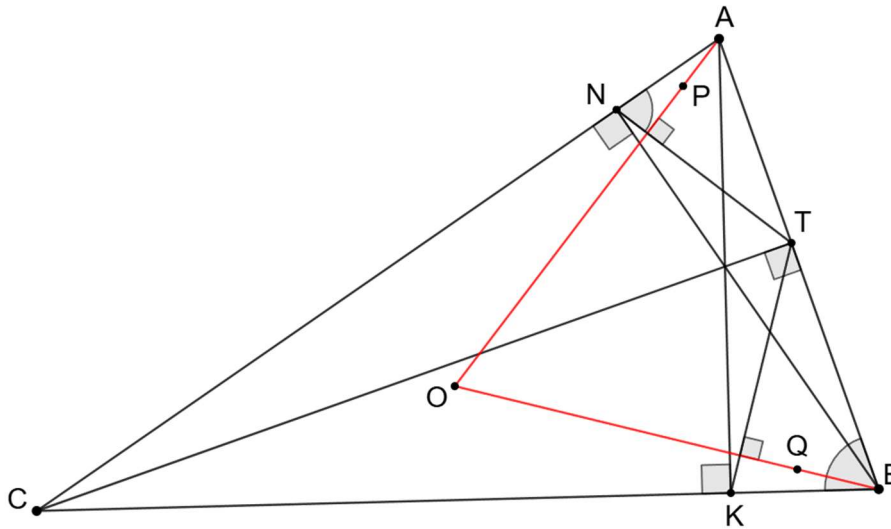


Рис. 8

Розв'язання.

Промені AP і BQ перетинаються в точці O (рис. 8). І ось чому. Відомо, що відрізок NT антипаралельний стороні BC , тобто $\angle ANT = B$ (покажіть!). А $\angle OAC = 90^\circ - B$, як було показано в Задачі 3. Оскільки $AP \perp NT$ (P – ортоцентр в ΔANT), тоді промінь AP проходить через точку O . Аналогічно промінь BQ проходить через O – центр описаного кола ΔABC .

Задача 9. (Євген Калашников)

У трикутнику ABC проведено висоту AK . Позначено також центроїд M та інцентр I цього трикутника. Побудуйте відрізок, що дорівнює радіусу r вписаного в ΔABC кола.

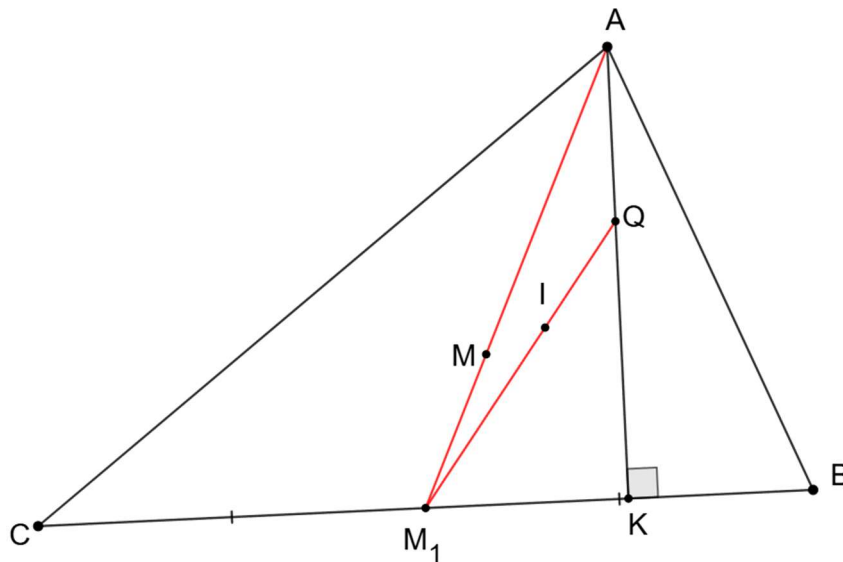


Рис. 9

Розв'язання.

Перша лінія – промінь AM , що перетинає сторону BC у її середині – точці M_1 (рис. 9). Промінь M_1I – друга лінія – при перетині з висотою AK в точці Q дає відрізок $AQ = r$. Покажемо це.

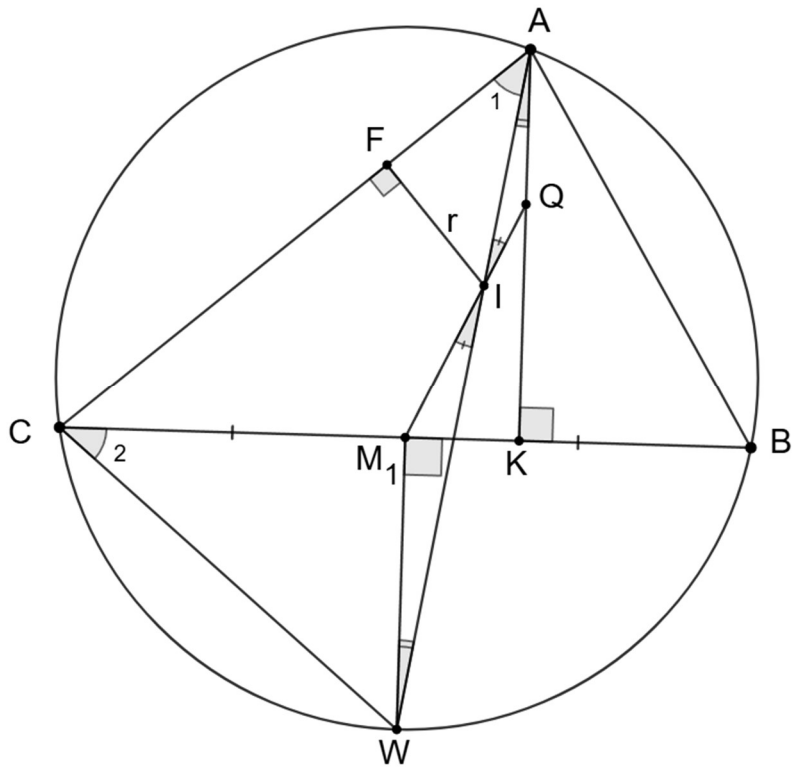


Рис. 10

З подібності $\triangle AIQ$ та $\triangle WIM_1$: $\frac{AI}{IW} = \frac{AQ}{M_1W}$ (1). Проведемо $IF = r$ (рис. 10). Оскільки $\angle 1 = \angle 2 = \frac{A}{2}$,

то $\triangle AIF \sim \triangle CWM_1$. Тоді $\frac{AI}{CW} = \frac{r}{M_1W}$ (2). Враховуючи, що $IW = CW$ (теорема «трилисника»), тоді з рівностей (1) та (2) отримуємо: $AQ = r$.

Задача 10.

Навколо $\triangle ABC$, в якому $AC > AB$, описано коло ω . Побудуйте середину дуги BC , що не містить вершину A .

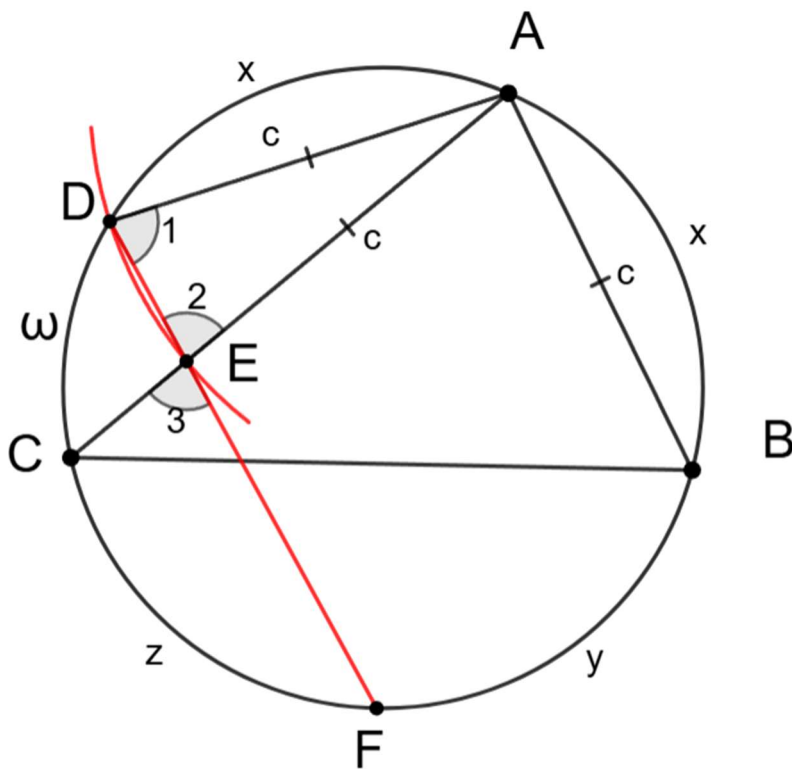


Рис. 11

Розв'язання.

З центром в точці A радіусом, рівним AB , проведемо коло – перша лінія. Нехай це коло перетинає ω в точці D , а сторону AC – в точці E (рис. 11). Нехай пряма DE – друга лінія – перетинає ω повторно в точці F . Покажемо, що F – середина дуги BC .

Позначимо $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \beta$ ($AB = AE = AD = c$), $\sphericalangle AB = x = \sphericalangle AD$, $\sphericalangle BF = y$, $\sphericalangle CF = z$. Отже,

$\angle 1 = \beta = \frac{x+y}{2}$ – вписаний, що спирається на дугу $A-B-F$. $\angle 2 = \frac{x+z}{2}$ – кут із вершиною всередині

кола. Отже, $\frac{x+y}{2} = \frac{x+z}{2}$, звідки $y = z$. Таким чином, точка F – середина дуги BC .

Задача 11.

Бісектриси BL та CN трикутника ABC при продовженні перетинають описане навколо нього коло ω відповідно в точках P і Q . Побудуйте точку G , що лежить на дотичній до ω , проведеної у вершині A .

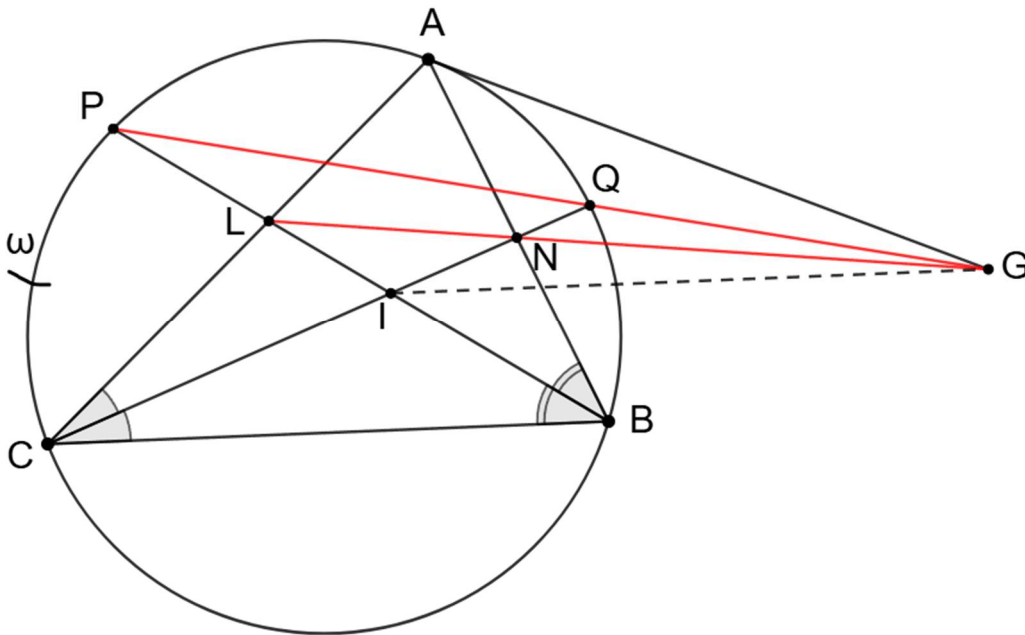


Рис. 12

Розв'язання.

Прямі LN і PQ є шуканими лініями. Нехай вони перетинаються в точці G (рис. 12). Покажемо, що AG – дотична до ω .

Вчинимо дещо інакше. Нехай пряма PQ і дотична у вершині A перетинаються в точці G .

Доведемо, що і пряма LN проходить через G . Застосуємо *теорему Паскаля* для 5-кутника $AQVCP$.

Дотична в точці A та пряма PQ перетинаються в точці G . AB і CQ перетинаються в точці N .

AC і BP перетинаються в точці L . Тоді $L-N-G$ – одна пряма. *Зауваження.* Можна показати

також, що пряма IG буде паралельна стороні BC .

Кілька завдань на побудову за допомогою *лише двох ліній* запропонуємо для самостійного розв'язання.

Задача 12. В квадраті $ABCD$ через вершину A під кутом 30° до сторони AB проведено промінь. Побудуйте кут, що рівний 15° .

Задача 13. В коло ω вписано $\triangle ABC$ із позначеними точками M і H – відповідно центроїдом та ортоцентром $\triangle ABC$. Побудуйте точку D , що діаметрально протилежна вершині B .

Задача 14. Дано опуклий 4-кутник $ABCD$. Побудуйте точку, сума відстаней від якої до вершини 4-кутника буде найменшою.

Задача 15. Навколо $\triangle ABC$ описано коло ω . T, P, Q – відповідно середини дуг BC, AC та AB . Побудуйте ортоцентр трикутника TPQ .

Задача 16. В $\triangle ABC$ вписано коло з центром I . K – точка дотику цього кола зі стороною BC . Побудуйте точку T , що ділить периметр трикутника ABC навпіл.

Задача 17. Три прями при перетині утворюють трикутник з кутами $90^\circ; 60^\circ; 30^\circ$. Побудуйте кут 15° .

Задача 18. Два кола перетинаються в точках A і B . Побудуйте 4 точки, які є вершинами трапеції.

Задача 19. Вписане в $\triangle ABC$ коло дотикається сторін BC і AC в точках D і E . F і K – середини сторін BC і AB відповідно. Побудуйте точку, що лежить на бісектрисі кута A .

Задача 20. Дано кут, що рівний 108° . Побудуйте третину даного кута.

Задача 21. Коло ω описано навколо $\triangle ABC$, в якому $AC > AB$. Побудуйте точку, що симетрична ортоцентру H відносно сторони BC .

Задача 22. В коло ω з центром O вписано $\triangle ABC$. Бісектриса AL при продовженні перетинає ω в точці W . Побудуйте точку S на симедіані, що виходить з вершини A (симедіана – пряма, що симетрична медіані відносно бісектриси).

Григорій Філіпповський

Верстальники: Ігор Бровченко, Андрій Бровченко

Коректор: Богдана Вовк